

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»**

Библиотека исследовательской школы
«Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах»

О.В. Болховская

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Электронное учебно-методическое пособие

Рекомендовано для аспирантов ННГУ, обучающихся по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия» (направленности 01.04.06 «Акустика», 01.04.03 «Радиофизика») и магистрантов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Нижегород
2015

УДК 537.86(075.8)

Болховская О.В. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 47 с.

Настоящее учебно-методическое пособие (УМП) направлено на ознакомление студентов с основными понятиями теории обнаружения. Обсуждаются основные идеи и методы решения задачи обнаружения в случае известных плотностей вероятностей. На примере обнаружения постоянного сигнала на фоне гауссова шума подробно обсуждаются характерные особенности характеристик оптимального детектора, построенного по критерию Неймана-Пирсона. В основу пособия лёг курс лекций, читавшийся автором студентам радиофизического факультета на протяжении более 5 лет и основанный на классическом труде S.Kay "Fundamental Statistical Signal Processing. Detection theory", до сих пор не переведенном на русский язык.

Настоящее УМП предназначено для аспирантов ННГУ, обучающихся по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия» (направленности 01.04.06 «Акустика», 01.04.03 «Радиофизика») и магистрантов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Работа выполнена для библиотеки Исследовательской школы «Колебательно – волновые процессы в природных и искусственных средах».

УДК 534.22

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ В ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ	4
1.1. Введение.....	4
1.2. Математическая задача обнаружения.....	9
1.2. Роль асимптотики.....	13
2. ОБЗОР ВАЖНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРЯТНОСТИ	16
2.1. Введение.....	16
2.2. Гауссова (нормальная) плотность вероятности.....	16
2.3. Центральное χ^2 -распределение.....	18
2.4. Нецентральное χ^2 -распределение.....	20
2.5. Центральное F -распределение.....	22
2.6. Нецентральное F -распределение.....	24
2.7. Распределение Рэлея.....	27
2.8. Распределение Райса.....	28
2.9. Квадратичные формы гауссовых случайных величин и асимптотическое гауссово распределение.....	30
2.10. Метод Монте-Карло.....	33
3. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ	35
3.1. Теорема Неймана-Пирсона.....	35
3.2. Доказательство теоремы Неймана-Пирсона.....	40
3.3. Примеры применения критерия Неймана-Пирсона.....	41
4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	45
БИБЛИОГРАФИЯ	46

1. ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ В ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

1.1. Введение

Современная теория обнаружения является основой для построения электронных систем обработки сигнала, в которых происходит принятие решений и извлечения информации. Можно выделить основные группы этих систем:

1. Радиолокационные
2. Системы связи
3. Системы обработки звука
4. Гидролокационные системы
5. Системы обработки изображений
6. Биомедицинские системы
7. Сейсмологические устройства.



Все эти системы объединены общей целью – они должны иметь возможность решить, когда произойдет интересующее нас событие и определить как можно больше информации о нем. Первая упомянутая задача и есть предмет теории обнаружения. Есть и другие названия, которые могут быть применены к ней – проверка гипотез, теория принятия решений [1]-[3].

Самый простой пример, который поможет иллюстрировать приложение теории обнаружения к обработке сигналов – классическая радиолокационная задача, в которой мы интересуемся наличием или отсутствием приближающегося самолета. Чтобы решить эту задачу, передатчик излучает электромагнитный импульс, который, отражаясь от большого движущегося объекта, показывает наличие самолета. Каким образом он это показывает?

Если самолет есть, то принятая волна будет содержать отраженный импульс с некоторой временной задержкой и шум из-за окружающего излучения и электроники. Если же самолет отсутствует, то в принятой волне будет содержаться только шум. В итоге функция системы обработки сигналов (обработчика сигналов, сигнального процессора) заключается как раз в принятии решения – присутствует ли в принятом колебании только шум (то есть нет самолета) или же в принятом колебании помимо шума присутствует отраженный сигнал, или эхо-сигнал (есть самолет).

Подробности можно видеть на рис 1.1 При этом на рис. 1.1а изображена приемно-передающая антенна, а на рисунке 1.1б – типичный вид принятого колебания в случае этих двух возможных сценариев. В случае наличия отраженного сигнала мы видим, что характер принятой волны несколько меняется, хотя, возможно, и не слишком сильно. Это происходит потому, что

принятый сигнал ослабляется из-за потерь при распространении и, возможно, искажается при взаимодействии со множественными отражателями.

Конечно, если самолет уже обнаружен, далее интересно определить его пеленг, дальность, скорость и т.д. Но это уже следующая задача, на первом же месте – задача обнаружения.

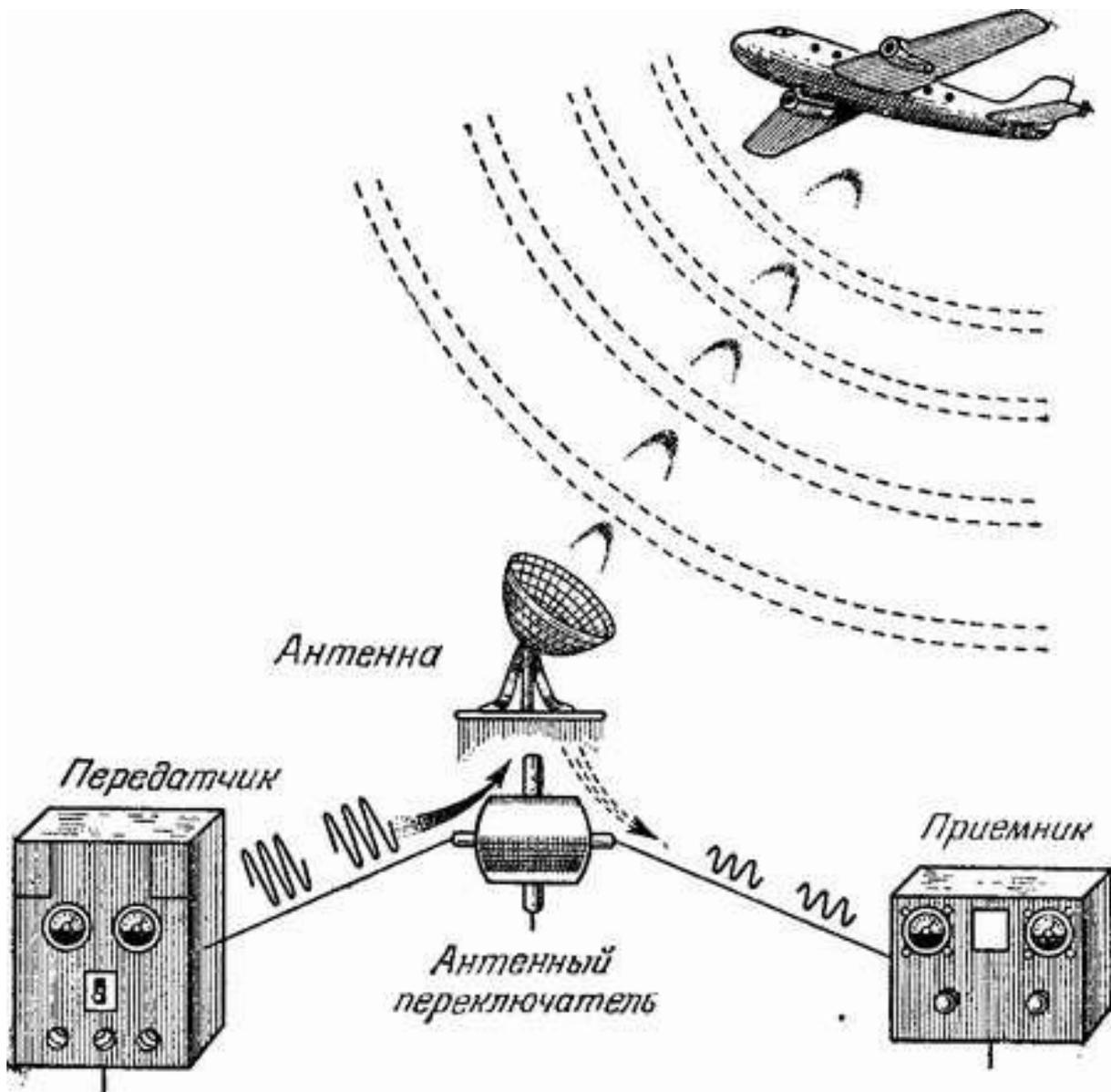


Рис. 1.1а (взято из презентации «Физика радиоволны» Иванова И.С)

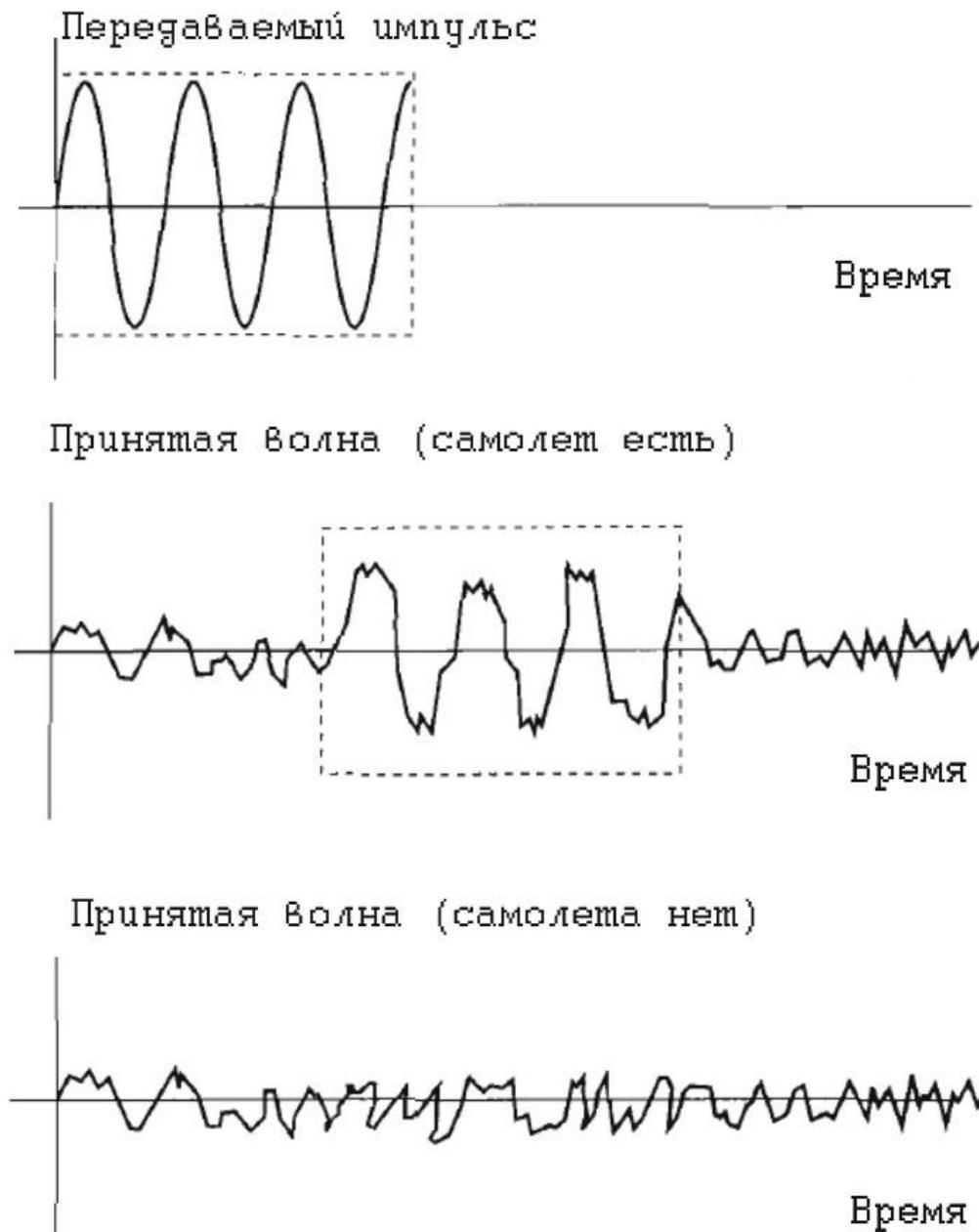


Рис. 1.16

Можно привести еще один пример из области разработки цифровых систем связи [4]. Это – система двоичной фазовой манипуляции (BPSK – binary phase shift keyed system), показанная на рисунке 1.2а и используемая для передачи цифровых данных типа «0» или «1» с выхода источника. Бит данных сначала модулируется, потом передается, а в приемнике демодулируется и затем детектируется. Модулятор преобразовывает «0» в сигнал $s_0(t) = \cos 2\pi F_0 t$, а «1» в сигнал $s_1(t) = \cos(2\pi F_0 t + \pi) = -\cos 2\pi F_0 t$ и таким образом дает возможность

передачи через полосовой канал с центральной частотой F_0 Гц. Фаза синусоиды показывает, что было послано – ноль или единица. И вот здесь, как и в задаче радиолокации, возникает необходимость принять решение.

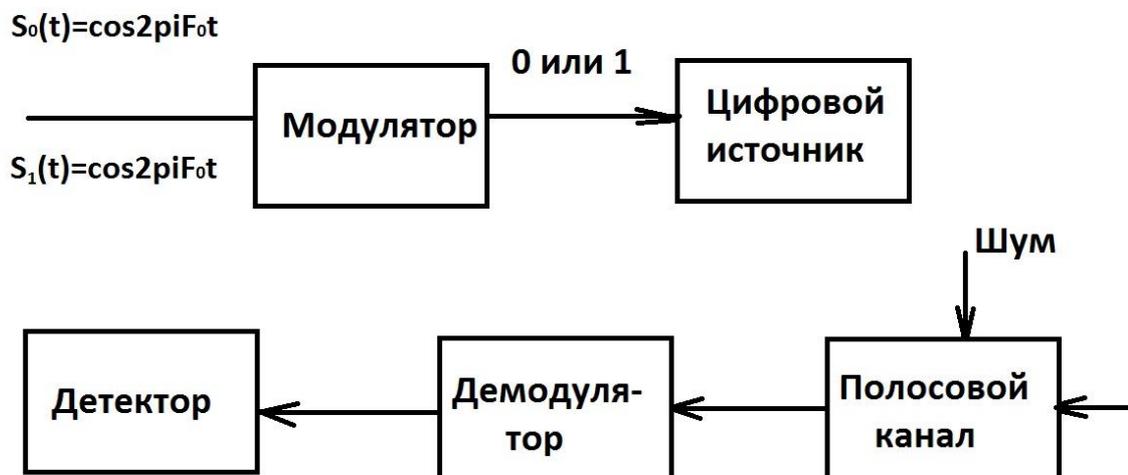


Рис.1.2а

Сейчас, в отличие от прошлого примера, сигнал присутствует и в том, и в другом случае. Нужно решить, какой именно этот сигнал - был ли принят «0» или же была принята «1». На рис.1.2б показан типичный принятый сигнал. После извлечения синусоидальной несущей из демодулятора всё, что остается в детекторе – это низкочастотный сигнал, положительный или отрицательный импульс. Этот сигнал обычно искажен ограниченностью ширины канала. И решение следует принимать на основе этого искаженного сигнала.

В этих и подобных системах решение принимается на основе непрерывного сигнала. Современные системы обработки сигналов используют цифровые компьютеры, которые производят выборку из непрерывного сигнала и сохраняют эти выборки. В результате мы имеем эквивалентную проблему принятия решения на основе дискретного сигнала или массива данных.

Проблема инженеров #1

Сделать по чертежу или так, чтобы всё работало?



Математически мы предполагаем, что доступен N -точечный массив (набор) данных $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$. Чтобы получить решение, мы сначала должны сформировать функцию данных $T(x[0], x[1], \dots, x[N-1])$, а затем принять решение, основываясь на ее значении. Определение функции T и отображение ее в решение и является

центральной проблемой, рассматриваемой в теории обнаружения. Хотя инженеры-электрики одно время разрабатывали системы на основе аналоговых сигналов и аналоговых схем, будущее все же за дискретными сигналами или последовательностями и цифровыми схемами. С этим переходом задача

обнаружения превратилась в задачу принятия решения на основе наблюдаемых временных рядов, то есть просто дискретного процесса.



Рис.1.2б

Поскольку мы хотим выбрать одну из двух возможных гипотез – «сигнал и шум» или «только шум», процесс может быть назван двухальтернативной задачей проверки гипотез. Главная цель при этом – использовать полученные данные так эффективно, как это возможно при принятии решения и при этом желательно принимать в большинстве случаев правильное решение.

Случается, что приходится выбирать между более чем двумя гипотезами. В таком случае говорят о многоальтернативной задаче проверки гипотез. Кроме того, задачу можно называть задачей классификации или распознаванием образов [5].



Все эти задачи характеризуются необходимостью выбрать между двумя или более возможными гипотезами, основываясь на наблюдаемом наборе данных, случайных по своей природе. Таким образом, становится очевидна необходимость статистического подхода к решению задач [6].

1.2. Математическая задача обнаружения

Начнем с самого простого случая. Будем считать, что сигнал постоянного тока амплитуды $A=1$ замаскирован белым гауссовым шумом $w[n]$ с дисперсией σ^2 . Для простоты обсуждения предположим, что доступна только одна выборка, и на ее основании нужно принять решение. Следовательно, мы должны принять решение о том, какая гипотеза справедлива:

только шум $x[0]=w[0]$ или
сигнал в шуме $x[0]=1+w[0]$

Предполагая с этого момента, что шум имеет нулевое среднее значение, можем решить, что

присутствует и сигнал, и шум, если $x[0]>0.5$
присутствует только шум, если $x[0]<0.5$,

так как среднее $E(x[0])=0$, если в наличии только шум, и $E(x[0])=1$, если в шуме содержится сигнал. Решение для $x[0]$ может быть выбрано произвольно, так как вероятность этого события равна нулю, далее будем опускать этот случай. Очевидно, что мы

получим ошибку, если сигнал есть и $w[0]<-0.5$ или же присутствует только шум, и $w[0]>0.5$. Следовательно, мы не можем ожидать правильного решения всегда, но, к счастью, мы можем решать правильно по крайней мере большую часть времени. Так, если рассмотреть сто реализаций $w[0]$ когда сигнал присутствует и когда отсутствует, то можно увидеть, что вероятность получить ошибку связана с увеличением величины разброса реализаций, то есть с величиной дисперсии шума, а еще точнее – с плотностью вероятности шума



ошибку связана с увеличением величины разброса реализаций, то есть с величиной дисперсии шума, а еще точнее – с плотностью вероятности шума

$$p(w[0]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}w^2[0]} \quad (1.1)$$

Это проиллюстрировано на рисунке 1.3 с помощью гистограммы данных $x[0]$ в случае наличия и отсутствия сигнала для различных дисперсий шума. Прерывистый график соответствует только шуму, сплошной – для сигнала и шума.

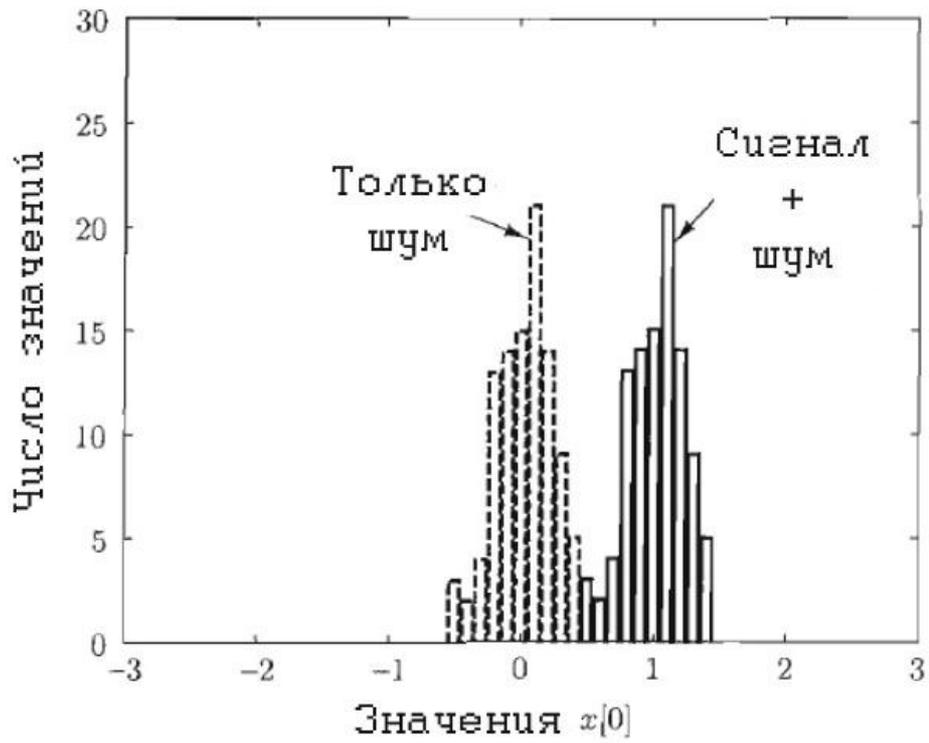


Рис.1.3а. $\sigma^2=0.05$

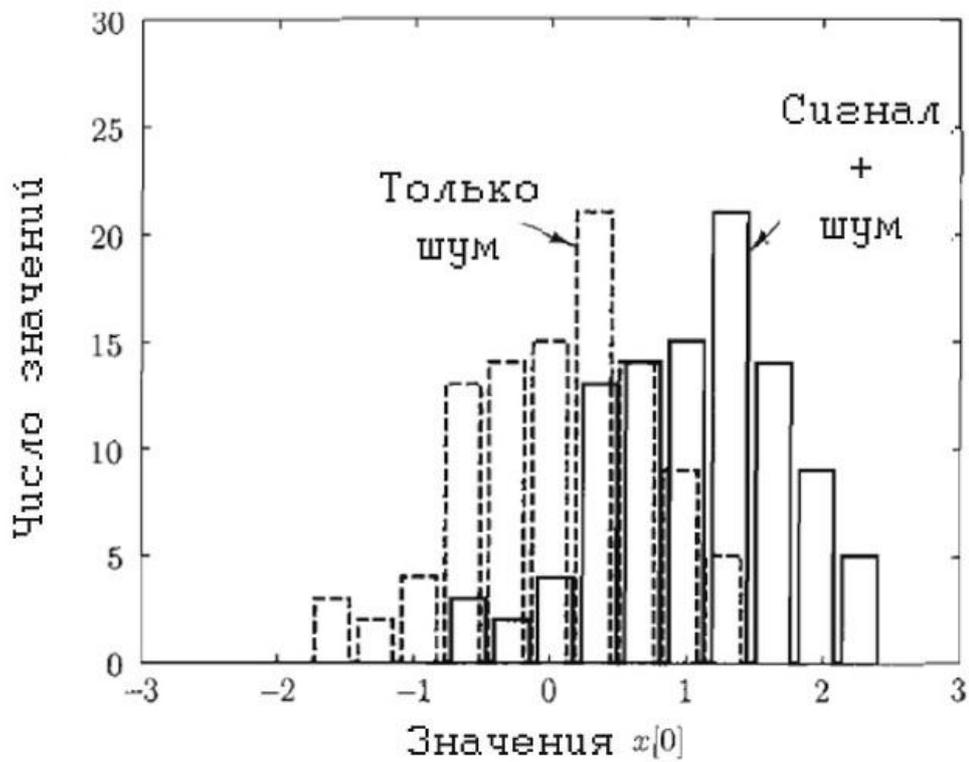


Рис.1.3б. $\sigma^2=0.5$

Очевидно, что работа любого детектора будет зависеть от того, насколько различны плотности вероятности $x[0]$ для каждой гипотезы. Для примера на рисунке 1.4 мы построили график для плотности вероятности данных с предыдущего рисунка для $\sigma^2=0.05$ и $\sigma^2=0.5$.

Когда присутствует только шум,

$$p(x[0]) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{0.1\pi}} e^{-10x^2[0]}, \sigma^2 = 0.05 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2[0]}, \sigma^2 = 0.5 \end{cases} \quad (1.2)$$

Когда вместе с шумом присутствует сигнал,

$$p(x[0]) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{0.1\pi}} e^{-10(x[0]-1)^2}, \sigma^2 = 0.05 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x[0]-1)^2}, \sigma^2 = 0.5 \end{cases} \quad (1.3)$$

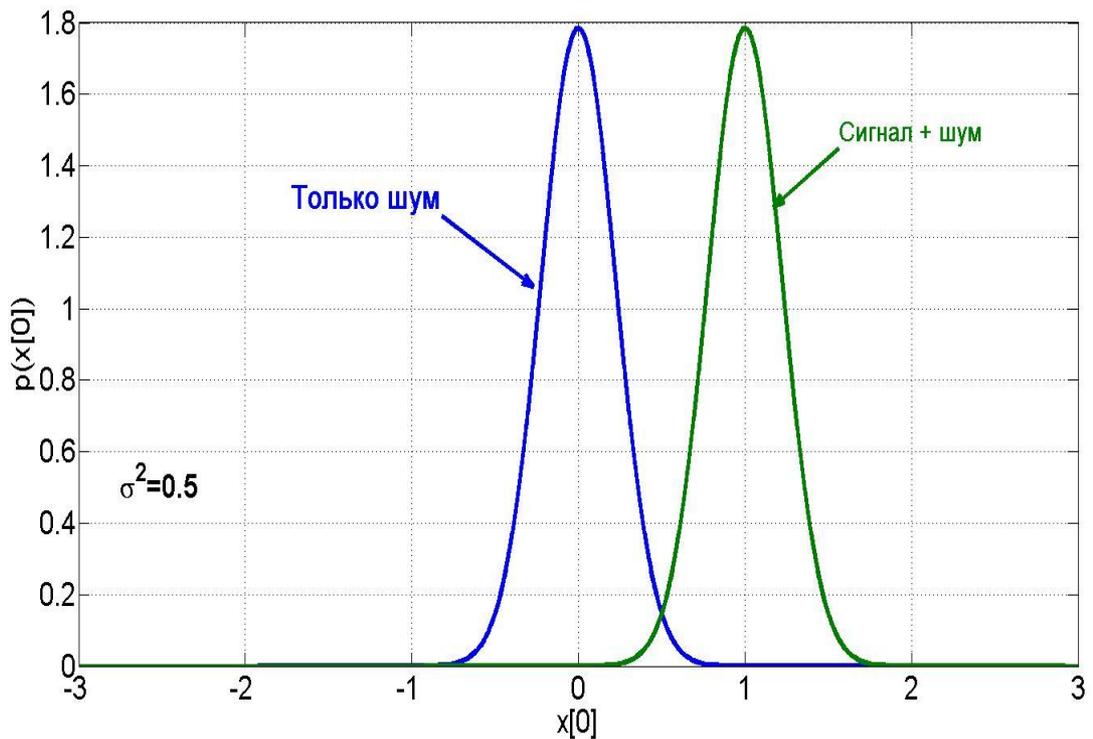


Рис. 1.4а

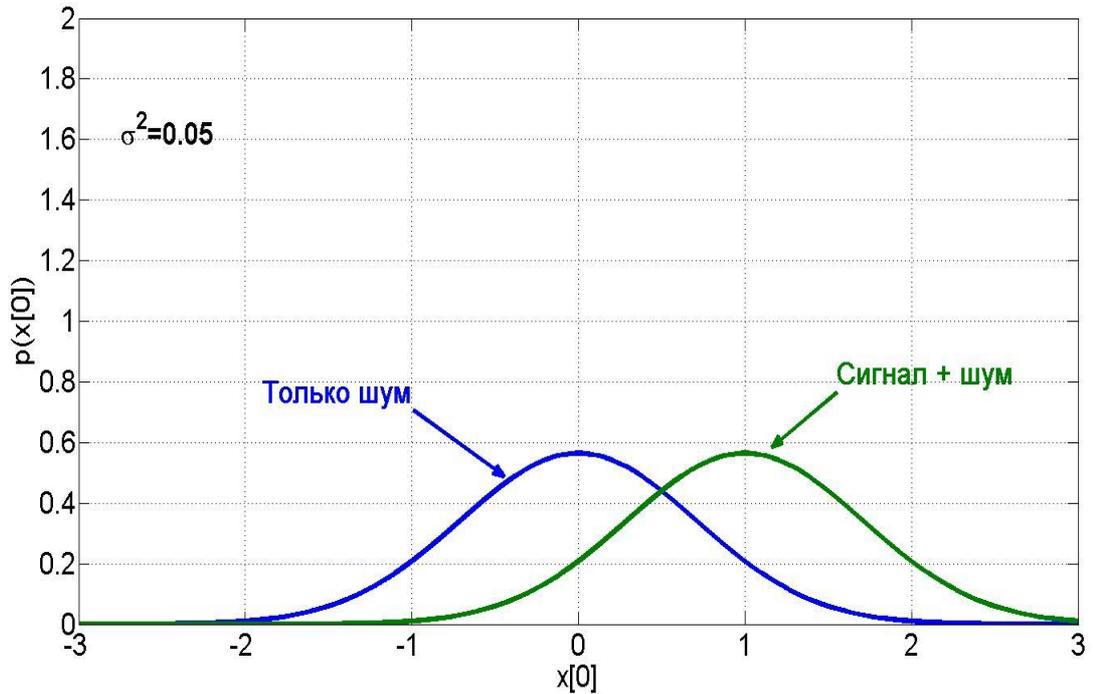


Рис. 1.46

Этот пример хорошо иллюстрирует, тот факт, что результативность обнаружения зависит от различия между двумя гипотезами или, что эквивалентно, от различия между плотностями вероятности.

Формально гипотезу об отсутствии сигнала называют нулевой гипотезой, или H_0 , а гипотезу о наличии сигнала – альтернативной, или H_1 , или

$$\begin{aligned} H_0 : x[0] &= w[0] \\ H_1 : x[0] &= 1 + w[0] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Плотности вероятности для каждой гипотезы обозначаются как $p(x[0]/H_0)$ и $p(x[0]/H_1)$ и для этого примера они выглядят как

$$p(x[0]/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2[0]} \quad (1.5)$$

$$p(x[0]/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x[0]-1)^2} \quad (1.6)$$

Заметим, что выбирая, какая гипотеза справедлива, H_0 или H_1 , мы по сути спрашиваем, был ли сгенерирован $x[0]$ в соответствии с плотностью

вероятности $p(x[0]/H_0)$ или плотностью вероятности $p(x[0]/H_1)$. Другими словами, если мы рассматриваем семейство плотностей вероятностей

$$p(x[0], A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x[0]-A)^2}, \quad (1.7)$$

которое параметризовано параметром A , то мы наблюдаем $p(x[0]/H_0)$, если $A=0$ и $p(x[0]/H_1)$, если $A=1$. Таким образом, можно рассматривать задачу обнаружения как параметрический тест: для данного наблюдения $x[0]$, плотность вероятности которого задана (1.7), мы хотим проверить, равно ли $A=0$ или $A=1$. Другими словами

$$\begin{aligned} H_0: & A = 0 \\ H_1: & A = 1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

что называется параметрическим тестом плотностей вероятностей. Иногда такая точка зрения оказывается удобнее для анализа.

1.2. Роль асимптотики

На практике мы принципиально интересуемся обнаружением сигналов, которые либо слабые, либо имеют небольшое отношение сигнал/шум (SNR – Signal to Noise Ratio). Если это не так, то нет особой необходимости в теории обнаружения, в отличие от задачи оценивания, в которой хотелось бы добиться высокой достоверности оценки. Поэтому в теории обнаружения, где в основном низкие SNR, наш успех в решении задач будет зависеть также от длины записи данных. В качестве иллюстрации предположим, что мы хотим обнаружить некоторый постоянный сигнал, но будем делать это путем неоднократных измерений. Наши данные будут состоять тогда из $x[n]=w[n]$ для $n=0,1,\dots,N-1$ для H_0 и $x[n]=A+w[n]$ для $n=0,1,\dots,N-1$ для H_1 , или, более формально,

$$\begin{aligned} H_0: & x[n] = w[n] \\ H_1: & x[n] = A + w[n] \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $w[n]$ – аддитивный гауссов шум (АГШ) с дисперсией σ^2 . Разумно было бы усреднить выборки и сравнить полученное значение с порогом γ таким образом, что мы решили бы, что справедлива гипотеза H_1 , если

$$T = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] > \gamma \quad (1.10)$$

Интуитивно мы ожидаем, что с ростом N эффективность обнаружения также будет возрастать. Чтобы оправдать нашу интуицию, посмотрим на гистограмму для T , построенную при $N=1$ и $N=10$ при дисперсии $\sigma^2=0.5$ (рис. 1.5). Этот эксперимент был повторен 100 раз, так что для T было сгенерировано 100 результатов. Как и ожидалось, перекрытие между гистограммами, которые и есть оценки плотности вероятности, только без нормирующего множителя) возрастает с уменьшением числа N . Для количественного определения этого факта используем меру, которая будет возрастать соответственно

увеличению различия между средними значениями $E(T/H_1) - E(T/H_0)$, и которая будет убывать, когда дисперсия каждой плотности вероятности будет увеличиваться. Отметим, что дисперсия $\text{var}(T/H_1)=\text{var}(T/H_1)$, и тогда получаем меру, называемую коэффициентом отклонения



$$d^2 = \frac{(E(T/H_1) - E(T/H_0))^2}{\text{var}(T/H_0)} \quad (1.11)$$

Для данной задачи легко показать, что

$$E(T/H_0) = 0$$

$$E(T/H_1) = A, \quad (1.12)$$

$$\text{var}(T/H_0) = \frac{\sigma^2}{N}$$

так что

$$d^2 = \frac{A^2}{\sigma^2/N} \quad (1.13)$$

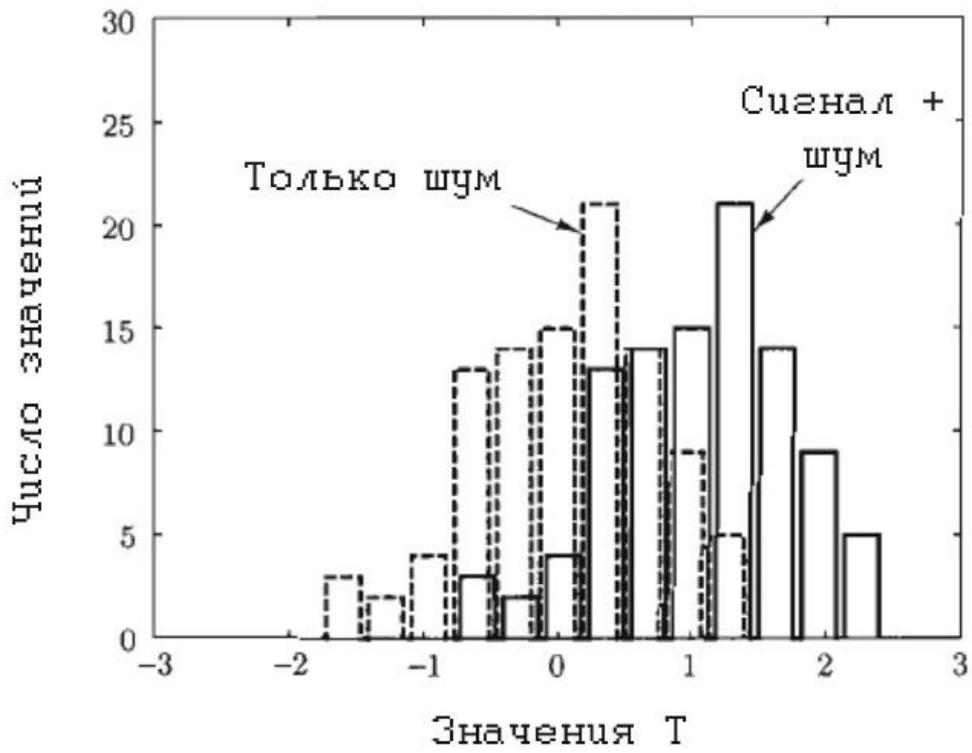


Рис.1.5а

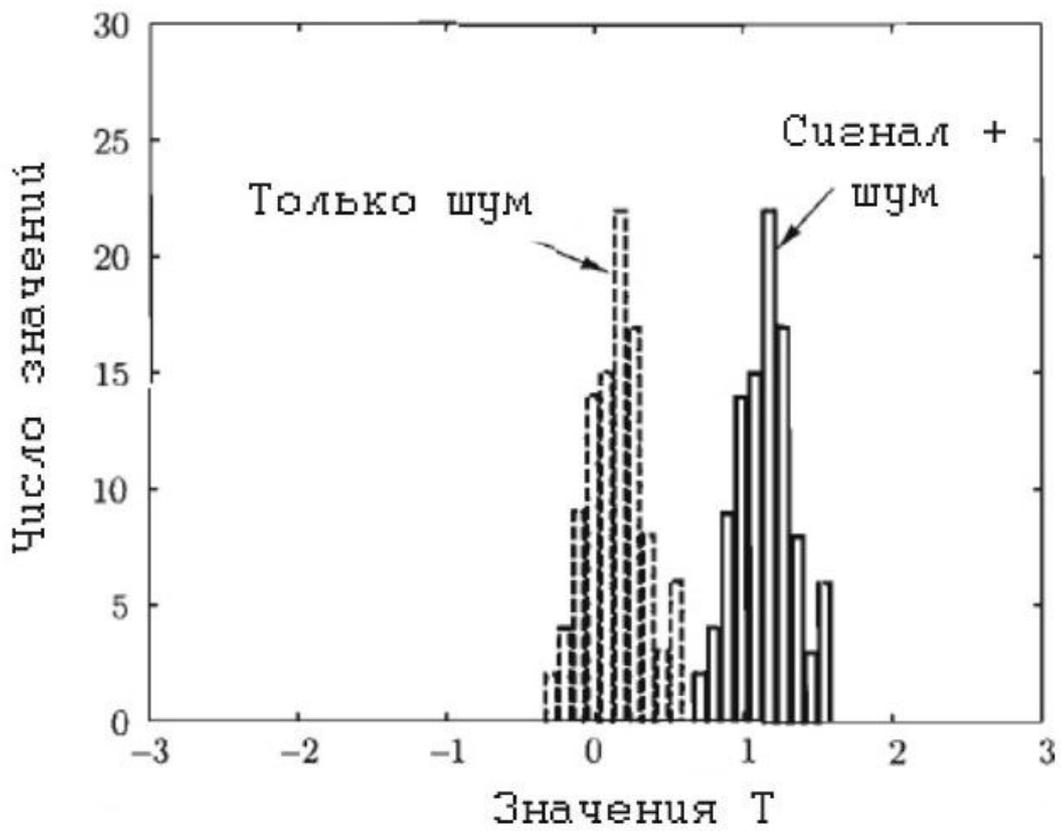


Рис.1.5б

Следовательно, как мы интуитивно и предполагали, эффективность обнаружения улучшается, когда $SNR=A^2/\sigma^2$ возрастает и/или когда длина полученных данных N увеличивается. Для слабых сигналов, для которых A^2/σ^2 мало, мы требуем большое число N для хорошей эффективности обнаружения. Это – эффект ослабления шума с помощью усреднения, поскольку дисперсия T равна σ^2/N . В результате, асимптотический подход (при $N \rightarrow \infty$) оказывается уместным и очень полезным. Он позволяет проще описывать обнаружители (детекторы) и анализировать их характеристики. Например, если $w[n]$ состоит из независимых и одинаково распределенных выборок негауссова шума, то T не будет иметь гауссову плотность вероятности. Однако при $N \rightarrow \infty$ возможно использование центральной предельной теоремы и оправдание таким образом гауссовой аппроксимации. Чтобы определить характеристики обнаружения, мы должны будем получить только два первых момента T .

2. ОБЗОР ВАЖНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРЯТНОСТИ

2.1. Введение

Оценка эффективности детектора зависит от возможности определить плотность вероятности функции выборочных данных, аналитически или численно. Когда это невозможно, мы должны использовать компьютерное моделирование методом Монте-Карло. Таким образом, знакомство с распространенными плотностями вероятности и их свойствами – это основа успеха в оценке эффективности. Далее будут приведены справочные материалы, которые потом будут использованы при решении задач. Дальнейшие детали можно найти в книгах [6]-[8].

2.2. Гауссова (нормальная) плотность вероятности

Гауссова плотность вероятности, также называемая нормальной, для скалярной случайной переменной x определяется как

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.1)$$

где μ – среднее, а σ^2 – дисперсия x (рис.2.1). Она обозначается $N(\mu, \sigma^2)$ и мы говорим, что $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, где \sim обозначает «распределен в соответствии с». Если $\mu=0$, то его моменты равны

$$E(x^n) = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)\sigma^n, & n - \text{четное} \\ 0, & n - \text{нечетное} \end{cases} \quad (2.2)$$

В противном случае используется формула

$$E[(x + \mu)^n] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E(x^k) \mu^{n-k}, \quad (2.3)$$

где $E(x^k)$ дается выражением (2.2).

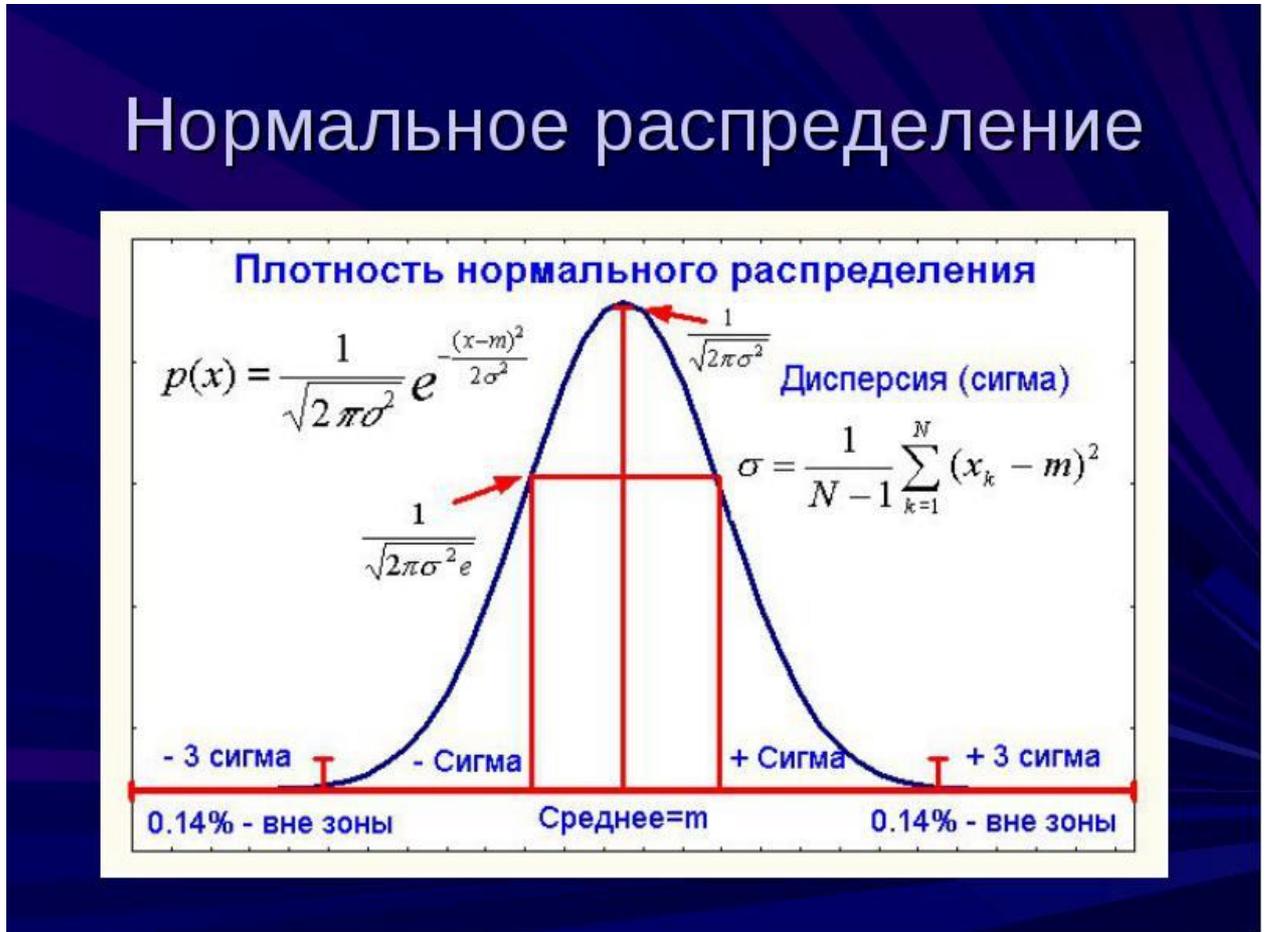


Рис.2.1 взят с funlib.ru

Интегральная функция распределения для $\mu=0$ и $\sigma^2=1$ (для такой функции распределения применяется термин «стандартная нормальная функция распределения»), определяется как

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (2.4)$$

Более удобное описание, которое в современной англоязычной литературе называется «вероятностью правого хвоста», является вероятностью превышения данного значения. Эта вероятность определяется как $Q(x)=1-\Phi(x)$, где

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (2.5)$$

Функция $Q(x)$ также упоминается как дополняющая интегральная функция распределения. Она не может быть найдена в аналитическом виде. Ее значения показаны на рис. 2.2.

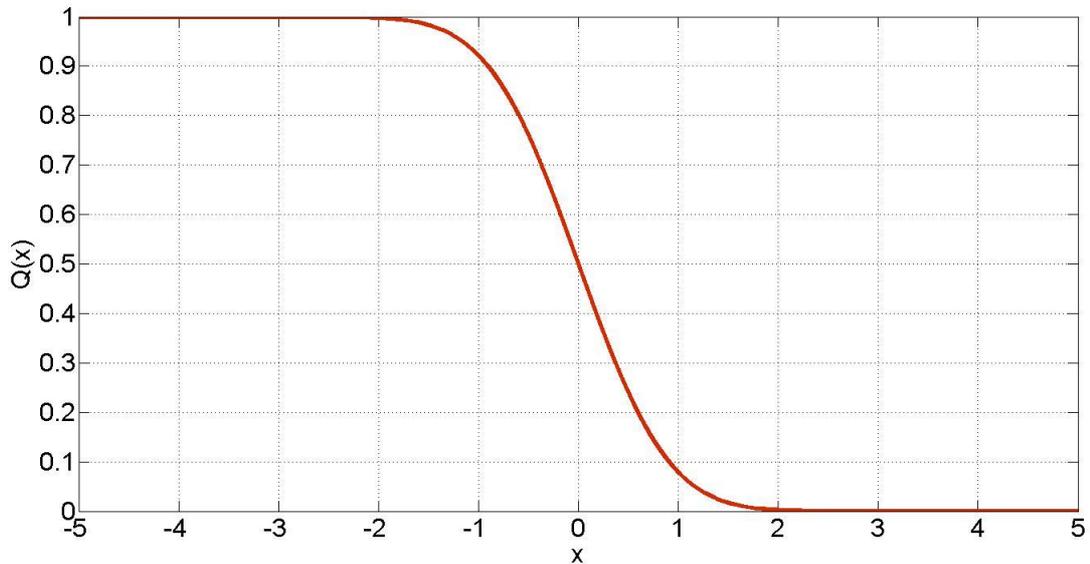


Рис.2.2

Многомерная гауссова плотность вероятности для $n \times 1$ случайного вектора \mathbf{x} определяется как

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{C}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right], \quad (2.6)$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – вектор средних значений, \mathbf{C} – ковариационная матрица, обозначается обычно как $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$. Предполагается, что \mathbf{C} – положительно определенная и, следовательно, \mathbf{C}^{-1} существует. Вектор средних определяется как

$$[\boldsymbol{\mu}]_i = E(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

а ковариационная матрица как

$$[c_{ij}] = E[(x_i - E(x_i))(x_j - E(x_j))], \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

или, в более компактной форме, как

$$\mathbf{C} = E[(\mathbf{x} - E(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - E(\mathbf{x}))^T] \quad (2.9)$$

2.3. Центральное χ^2 -распределение

Плотность вероятности, распределенная как χ^2 с ν степенями свободы определяется как

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{v/2} \Gamma(\frac{v}{2})} x^{v/2-1} \exp(-\frac{1}{2}x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

и обозначается как χ^2_v . Степени свободы v должны быть целым числом $v \geq 1$. Функция $\Gamma(u)$ - это гамма-функция, определяемая как

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-t} dt \quad (2.11)$$

Соотношение $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ справедливо для любого n , $\Gamma(n) = (n-1)!$ – справедливо для целого n , $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Несколько примеров этой плотности вероятности приведены на рис. 2.3

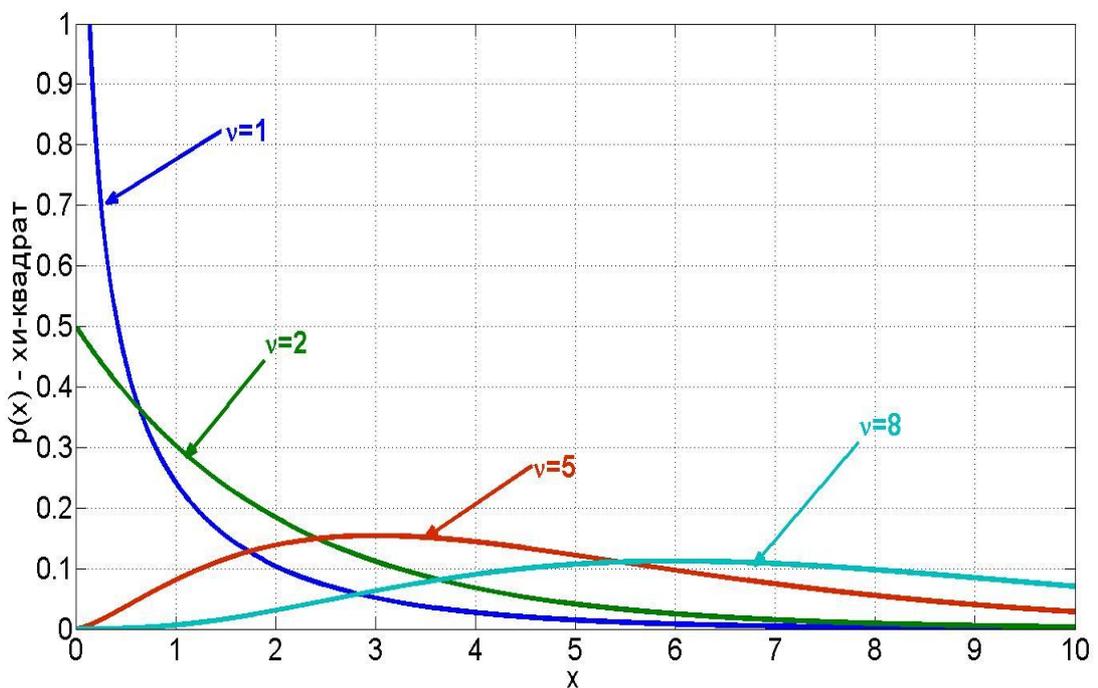


Рис.2.3

При увеличении числа степеней свободы распределение стремится к гауссовскому. Заметим, что при числе степеней свободы $v=1$ плотность вероятности при $x=0$ бесконечна.

Плотность вероятности хи-квадрат возникает как плотность вероятности x , где $x = \sum_{i=1}^v x_i^2$, где $x_i \sim N(0,1)$ и x_i независимы и одинаково распределены

Последнее означает, что каждый x_i независим от других и все x_i имеют одну и ту же плотность вероятности. Среднее и дисперсия χ^2 распределения с v степенями свободы определяются как

$$E(x) = v \quad (2.12)$$

$$\text{var}(x) = 2\nu \quad (2.13)$$

Особенно интересен случай, когда $\nu=2$. Тогда

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}x\right), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Эта плотность вероятности называется экспоненциальной. Вероятность правого хвоста для случайной переменной с распределением χ^2_ν определяется как

$$Q_{\chi^2_\nu}(x) = \int_x^\infty p(t)dt, \quad x > 0 \quad (2.15)$$

и, как показано в [9], для четного ν

$$Q_{\chi^2_\nu}(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \sum_{k=0}^{\nu/2-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!}, \quad \nu \geq 2 \quad (2.16)$$

и для нечетного ν

$$Q_{\chi^2_\nu}(x) = \begin{cases} 2Q(\sqrt{x}), & \nu = 1 \\ 2Q(\sqrt{x}) + \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}x\right]}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\nu/2-1} \frac{(k-1)!(2x)^{k-\frac{1}{2}}}{(2k-1)!}, & \nu \geq 3 \end{cases} \quad (2.17)$$

2.4. Нецентральное χ^2 -распределение

Обобщение плотности вероятности χ^2_ν возникает как результат суммирования квадратов независимых и одинаково распределенных гауссовых случайных переменных с ненулевыми средними значениями. Точнее, если

$x = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$, где x_i независимы и $x_i \sim N(\mu, 1)$, то x имеет нецентральное χ^2

распределение с ν степенями свободы и параметр нецентральности

$\lambda = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i^2$. Плотность вероятности имеет достаточно сложный вид и может быть

записана либо в интегральной форме, либо в виде бесконечного ряда. В интегральном виде:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{\nu-2}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x+\lambda)\right] I_{\frac{\nu}{2}-1}(\sqrt{\lambda x}), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

где $I_r(u)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка r . Она определяется как

$$I_r(u) = \frac{\left(\frac{1}{2}u\right)^r}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{u \cos \Theta} \sin^{2r} \Theta d\Theta \quad (2.19)$$

В виде ряда:

$$I_r(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}u\right)^{2k+1}}{k!\Gamma(r+k+1)} \quad (2.20)$$

Примеры этой плотности вероятности приведены на рис.2.4а (для разного числа степеней свободы при параметре нецентральности $\lambda=4$) и на рис. 2.4б (для $\nu=2$ и разных параметрах нецентральности).

Заметим, что плотность вероятности становится гауссовой, когда параметр ν становится большим. Используя разложение в ряд (2.20), плотность вероятности можно представить также в виде бесконечного ряда:

$$p(x) = \frac{x^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(x+\lambda)\right]}{2^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda x}{4}\right)^k}{k!\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + k\right)} \quad (2.21)$$

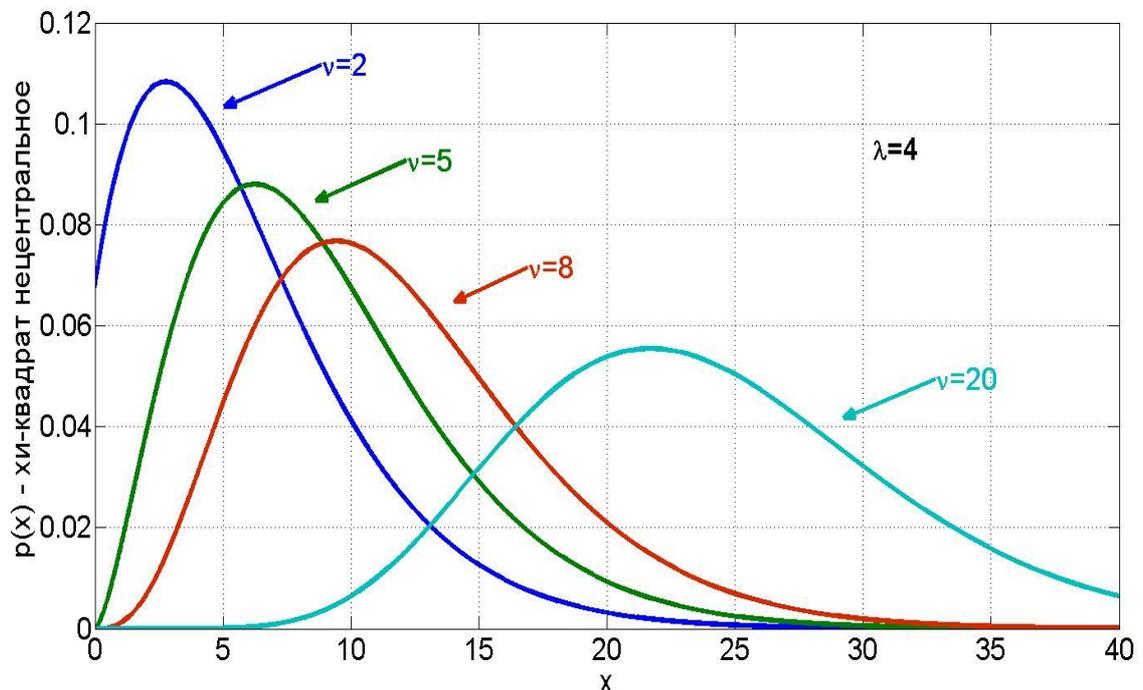


Рис.2.4а

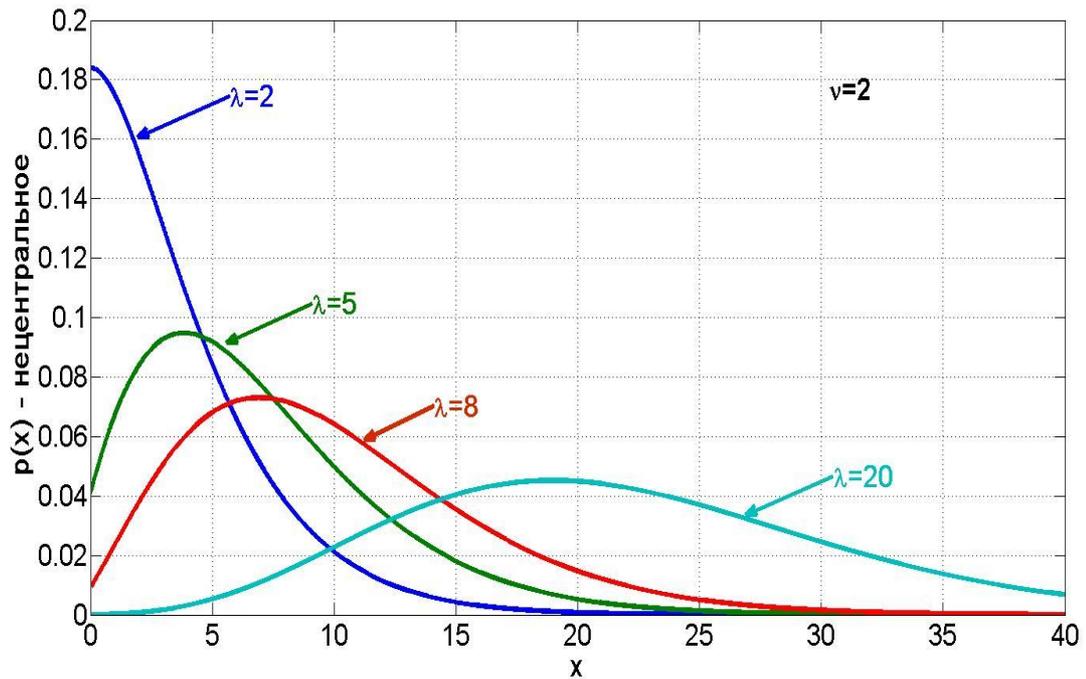


Рис.2.4б

Заметим, что при $\lambda=0$ нецентральное хи-квадрат распределение превращается в центральное. Нецентральное хи-квадрат распределение с ν степенями свободы и параметром нецентральности λ обозначается $\chi^2_{\nu}(\lambda)$, а его среднее значение и дисперсия равны соответственно

$$E(x) = \nu + \lambda \quad (2.22)$$

$$\text{var}(x) = 2\nu + 4\lambda \quad (2.23)$$

Обозначим вероятность правого хвоста как

$$Q_{\chi^2_{\nu}(\lambda)}(x) = \int_x^{\infty} p(t) dt, \quad x > 0 \quad (2.24)$$

Эти значения могут быть определены численно с помощью различных приложений [10].

2.5. Центральное F -распределение

F-распределение возникает в том случае, когда речь идет об отношении двух независимых случайных переменных с распределением χ^2 . Точнее, если

$$x = \frac{x_1 / \nu_1}{x_2 / \nu_2} \quad (2.25)$$

где $x_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$, $x_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$ и x_1 и x_2 независимы, то x имеет F-распределение. Оно дается формулой

$$p(x) = \begin{cases} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{v_1/2} \frac{x^{\frac{v_2}{2}-1}}{B\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right) \left(1 + \frac{v_1}{v_2}x\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Где $B(u, v)$ – В-функция, которая связана с гамма-функцией как

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \quad (2.27)$$

Плотность вероятности, обозначаемая как Fv_1v_2 – это F-распределение с v_1 степенями свободы числителя и v_2 степенями свободы знаменателя. Некоторые примеры плотности вероятности даны на рис.2.5 для $v_1=10$ и на рис.2.6 для $v_2=10$. Вероятность правого хвоста обозначается как $Q_{Fv_1v_1}(x)$ и оценивается численно. Среднее и дисперсия равны

$$E(x) = \frac{v_1}{v_2 - 2}, \quad v_2 > 2$$

$$\text{var}(x) = \frac{2v_2^2}{v_1(v_2 - 4)(v_2 - 2)^2}, \quad v_2 > 4 \quad (2.28)$$

Заметим, что при $v_2 \rightarrow \infty$, $x \rightarrow x_1/v_1 \sim \chi^2_{v_1}/v_1$.

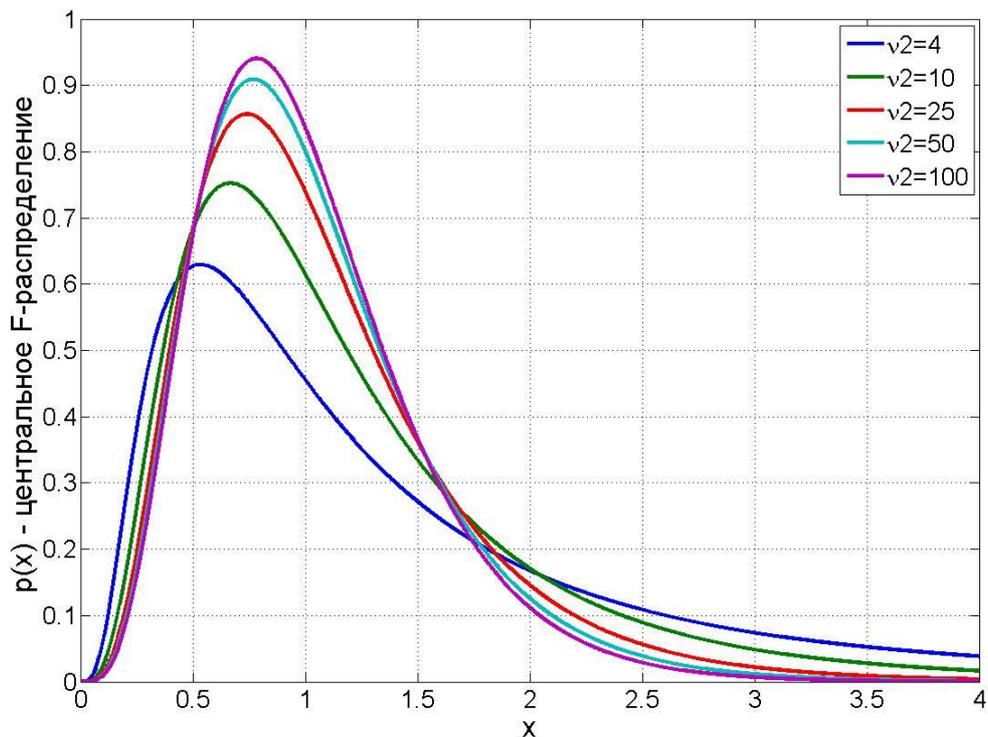


Рис.2.5

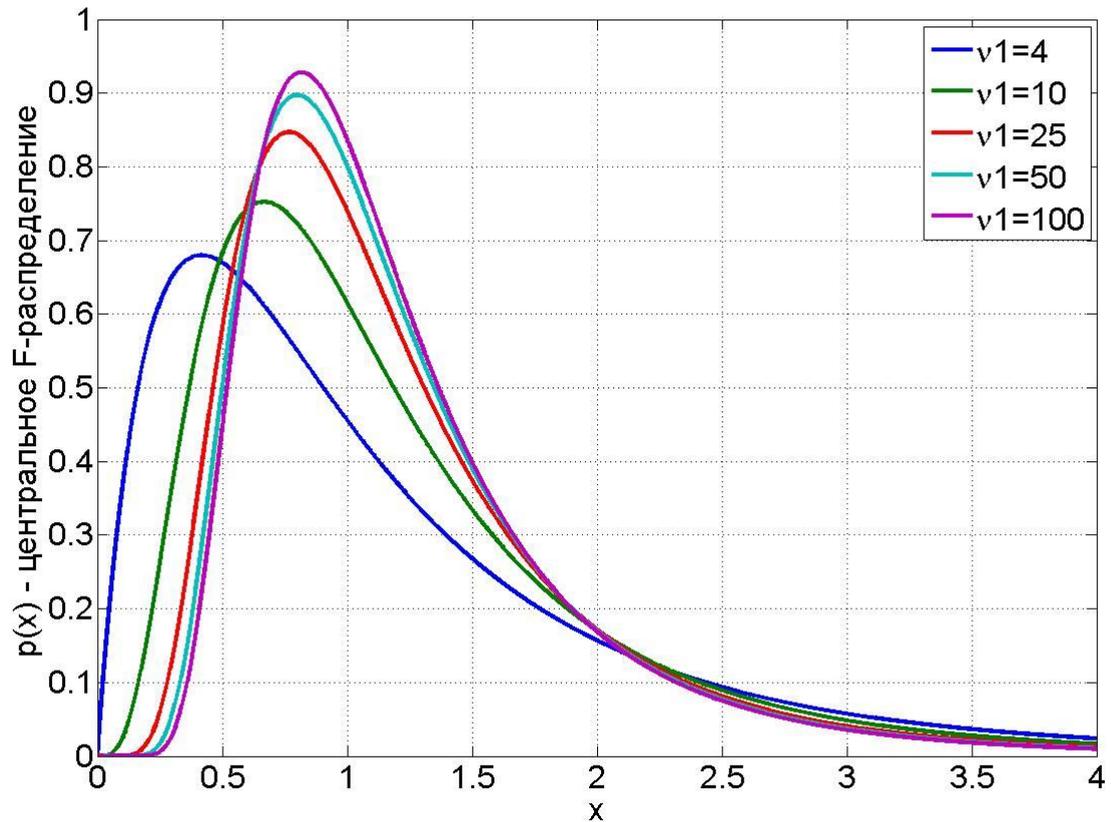


Рис.2.6

2.6. Нецентральное F -распределение

Нецентральное F-распределение возникает в том случае, когда речь идет об отношении случайной величины с нецентральным хи-квадрат распределением к случайной величине с центральным хи-квадрат распределением, а именно, если

$$x = \frac{x_1 / v_1}{x_2 / v_2} \quad (2.29)$$

где $x_1 \sim \chi^2_{v_1}(\lambda)$, $x_2 \sim \chi^2_{v_2}$ и x_1 и x_2 независимы, то x имеет нецентральное F-распределение. Оно обозначается как $F_{v_1 v_2}(\lambda)$ и дается формулой с v_1 степенями свободы числителя и v_2 степенями свободы знаменателя, а также с параметром нецентральности λ . Эта плотность вероятности имеет форму бесконечного ряда

$$p(x) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!} \frac{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{2}v_1+k_1}}{B\left(\frac{v_1+2k}{2}, \frac{v_2}{2}\right)} x^{\frac{v_1}{2}+k-1} \left(1 + \frac{v_1}{v_2}x\right)^{-\frac{v_1+v_2-k}{2}} \quad (2.30)$$

Некоторые примеры плотности вероятности приведены на рис.2.7-2.9. На рис. 2.7 параметр нецентральности $\lambda=5$, $\nu_1=5$, число степеней свободы ν_2 меняется. На рис. 2.8 $\lambda=5$, $\nu_2=5$, число степеней свободы ν_1 меняется. На рис.2.9 $\nu_1=5$, $\nu_2=5$, параметр нецентральности λ меняется. Среднее значение и дисперсия равны

$$E(x) = \frac{\nu_1(\nu_1 + \lambda)}{\nu_1(\nu_2 - 2)}, \quad \nu_2 > 2$$

$$\text{var}(x) = 2 \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^2 \frac{(\nu_1 + \lambda)^2 + (\nu_1 + 2\lambda)(\nu_2 - 2)}{(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 2)^2}, \quad \nu_2 > 4 \quad (2.31)$$

Вероятность правого хвоста обозначается как $Q_{F\nu_1\nu_2(\lambda)}(x)$ и оценивается численно. Заметим также, что при $\lambda \rightarrow \infty$, $F_{\nu_1\nu_2}(\lambda) \rightarrow \chi^2_{\nu_1}(\lambda)$.

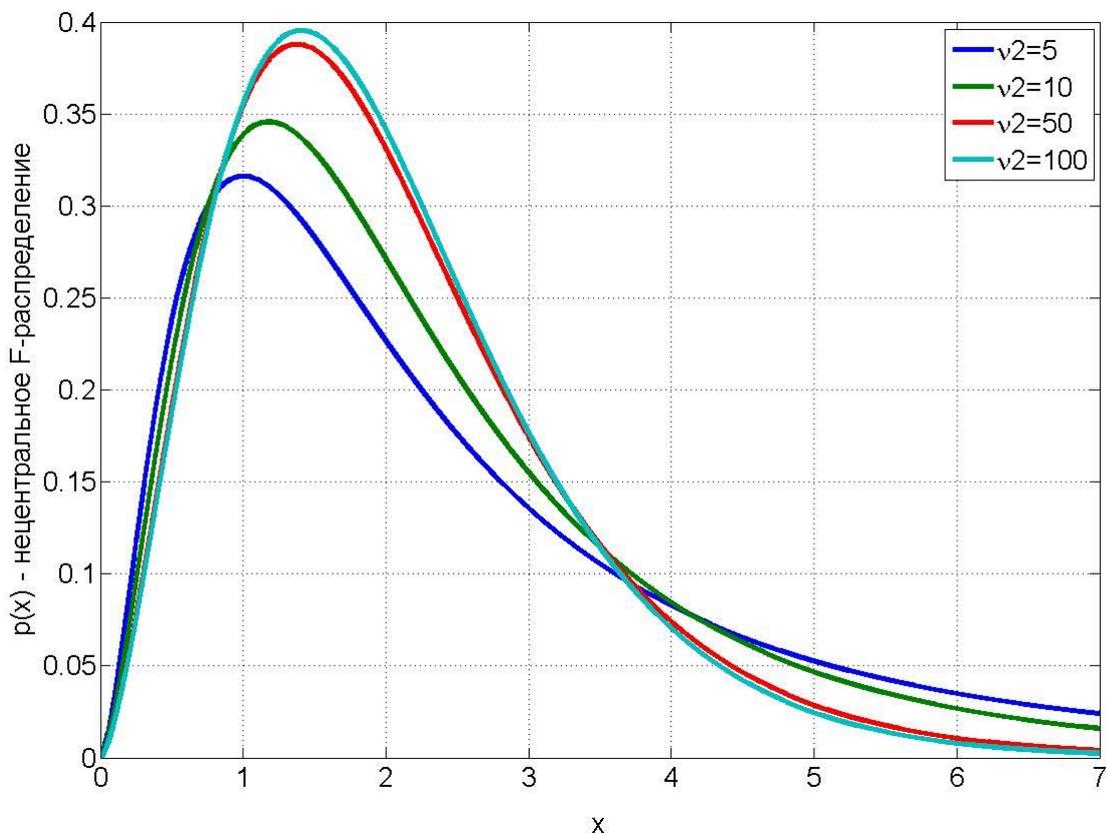


Рис.2.7

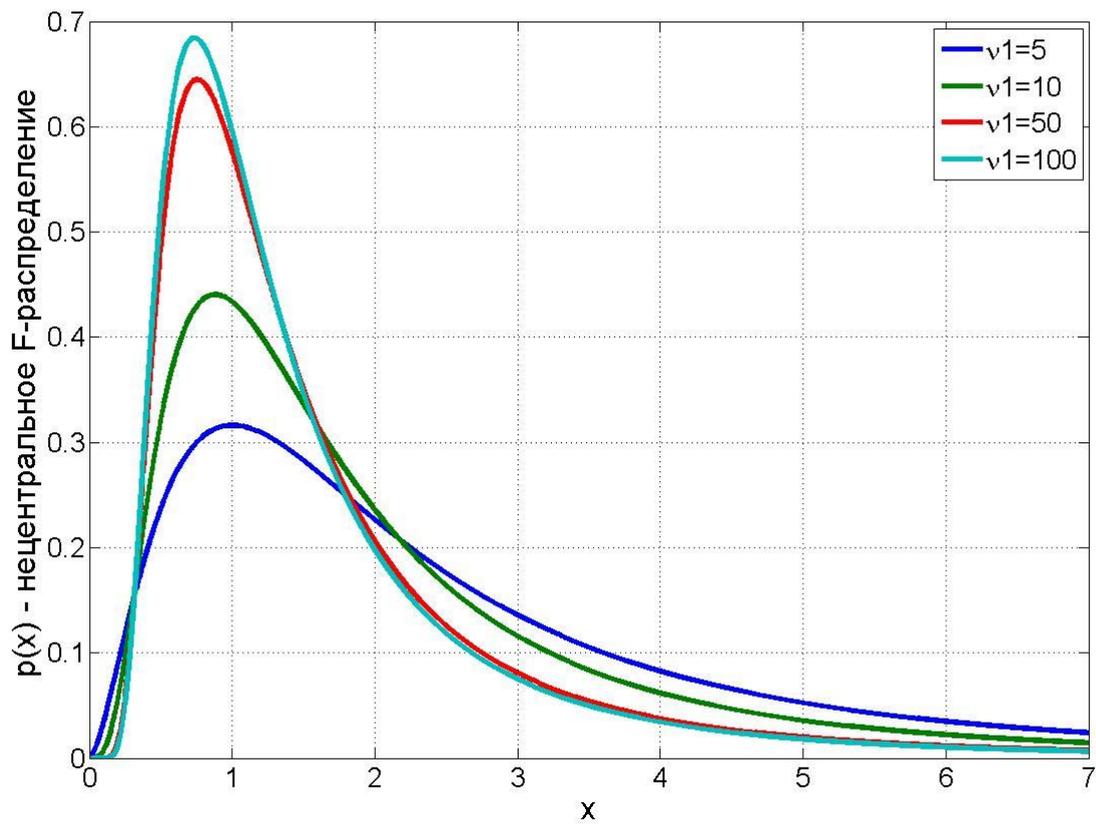


Рис.2.8

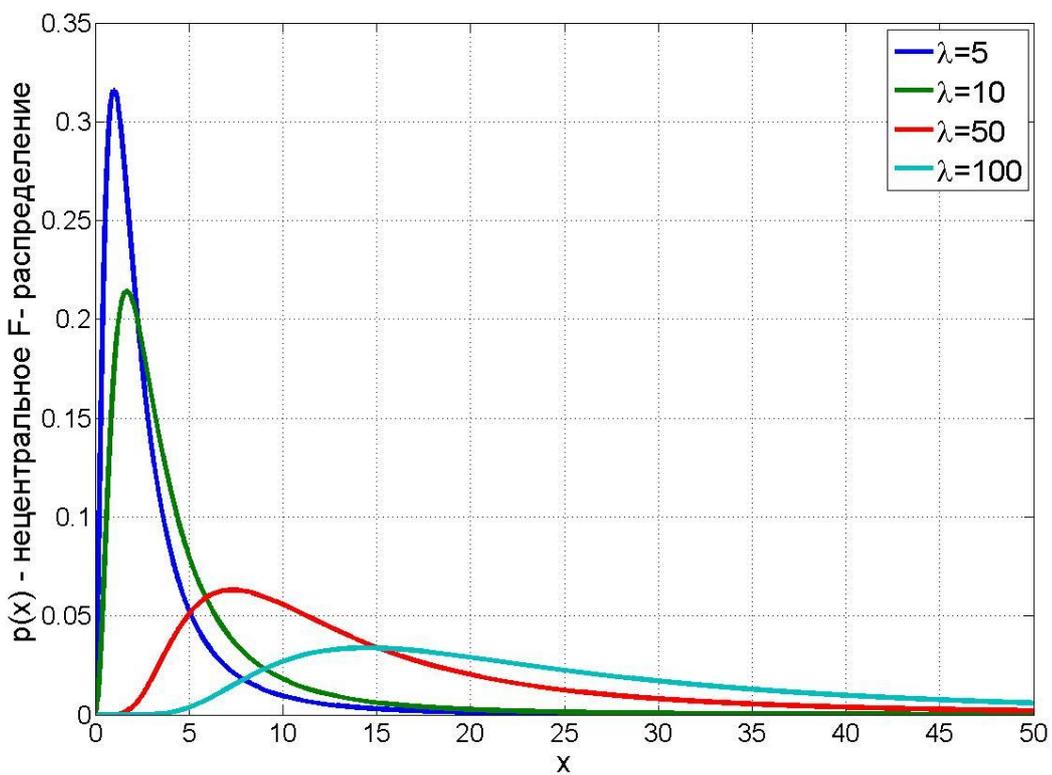


Рис.2.9

2.7. Распределение Рэлея

Распределение Рэлея получается как плотность вероятности для

$x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, где $x_1 \sim N(0, \sigma^2)$, $x_2 \sim N(0, \sigma^2)$ и x_1 и x_2 независимы. Она имеет

вид

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Примеры плотности вероятности приведены на рис.2.10. Среднее и дисперсия распределения Рэлея равны

$$E(x) = \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$$

$$\text{var}(x) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 \quad (2.33)$$

Вероятность правого хвоста может быть легко получена как

$$\int_x^\infty p(t)dt = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.34)$$

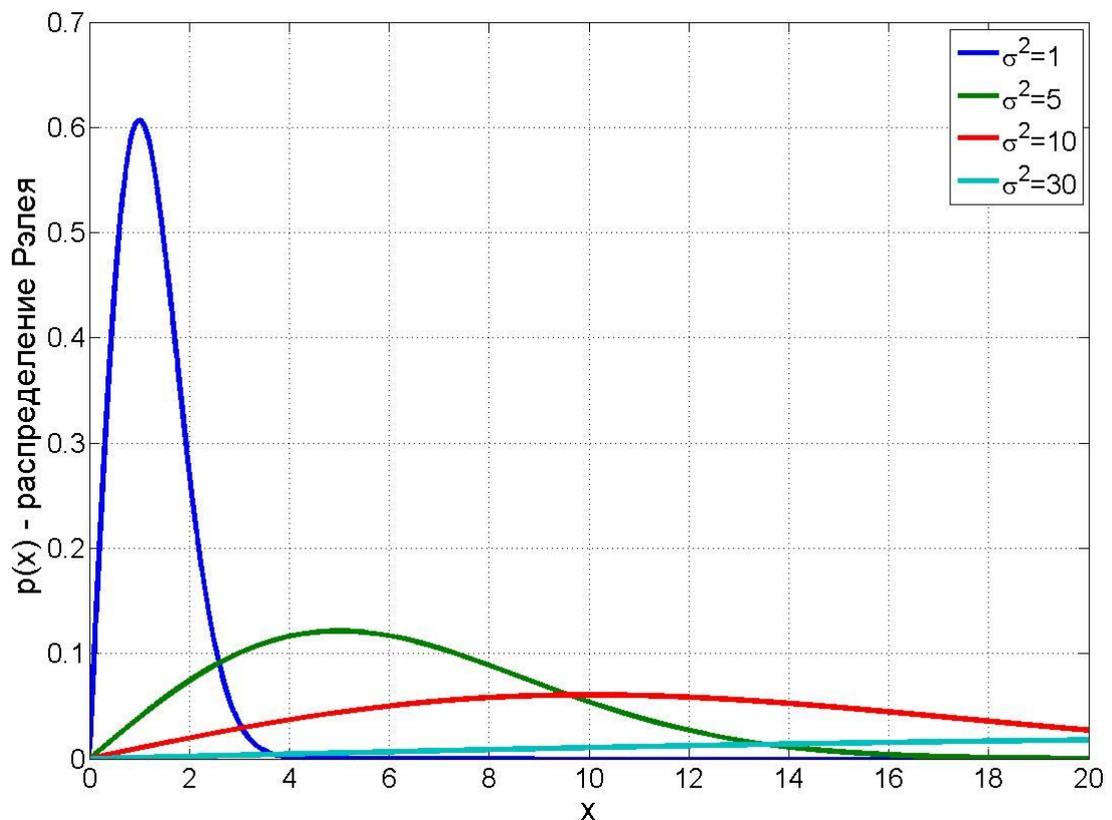


Рис.2.10

Распределение Рэлея связано с распределением хи-квадрат, поскольку если x – случайная величина, имеющая рэлеевское распределение, то $x = \sqrt{\sigma^2 y}$, где $y \sim \chi_2^2$. В результате вероятности правых хвостов этих распределений оказываются связанными как

$$\begin{aligned} \Pr\{x > \sqrt{\gamma'}\} &= \Pr\left\{x / \sqrt{\sigma^2} > \sqrt{\gamma' / \sigma^2}\right\} = \Pr\left\{\sqrt{y} > \sqrt{\gamma' / \sigma^2}\right\} = \\ &= \Pr\left\{y > \gamma' / \sigma^2\right\} = Q_{\chi_2^2}\left(\frac{\gamma'}{\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Или

$$\Pr\{x > \gamma\} = Q_{\chi_2^2}\left(\frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.36)$$

Что соответствует (2.34), поскольку

$$Q_{\chi_2^2}(x) = \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \quad (2.37)$$

2.8. Распределение Райса

Райсовская плотность вероятности получается как плотность вероятности случайной величины $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, где $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ и x_1 и x_2 независимы. Эта плотность вероятности имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + \alpha^2)\right) I_0\left(\frac{\alpha x}{\sigma^2}\right), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

где $\alpha^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$ и $I_0(u)$ дается выражением (2.19) с $\nu=0$ или

$$I_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{u \cos \Theta} d\Theta = \int_0^{2\pi} e^{u \cos \Theta} \frac{d\Theta}{2\pi} \quad (2.39)$$

Некоторые примеры этого распределения приведены на рис. 2.11 для единичной дисперсии и на рис. 2.12 для дисперсии $\sigma^2=4$. При α^2 распределение сводится к рэлеевскому. Его моменты вычисляются с помощью вырожденных гипергеометрических функций, см. [9],[11].

Можно показать, что вероятность правого хвоста может быть выражена через нецентральное хи-квадрат распределение, после чего быть посчитана численно:

$$\Pr\{x > \sqrt{\gamma'}\} = \Pr\left\{\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sigma^2}} > \sqrt{\frac{\gamma'}{\sigma^2}}\right\} = \Pr\left\{\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sigma^2} > \frac{\gamma'}{\sigma^2}\right\} = Q_{\chi_2^2}(\lambda) \left(\frac{\gamma'}{\sigma^2}\right) \quad (2.40)$$

или

$$\Pr\{x > \gamma\} = Q_{\chi^2_2}(\lambda) \left(\frac{\gamma^2}{\sigma^2} \right) \quad (2.41)$$

где

$$\lambda = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\sigma^2} \quad (2.42)$$

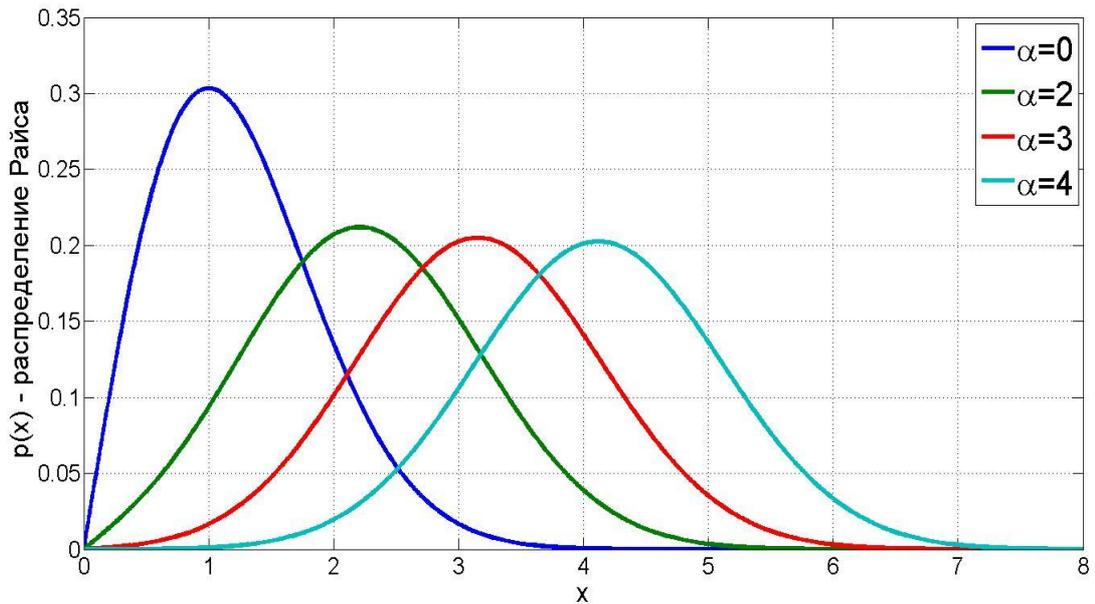


рис.2.11

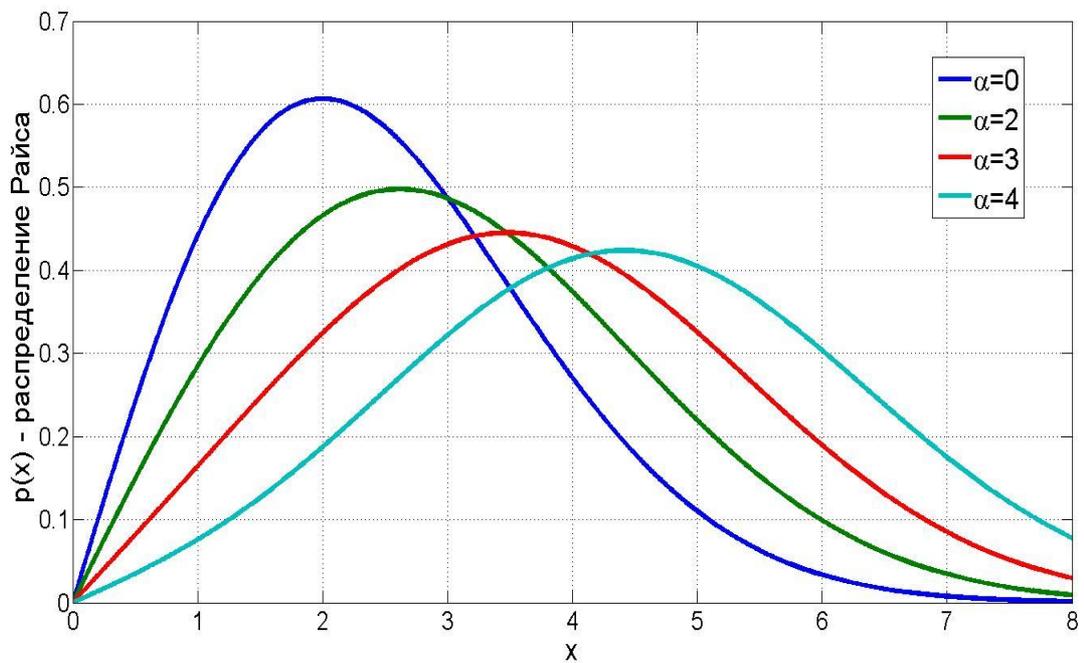


Рис.2.12

2.9. Квадратичные формы гауссовых случайных величин и асимптотическое гауссово распределение

1. Часто возникает необходимость найти плотность вероятности для $y = x^T A x$, где A - симметричная матрица размера $n \times n$, а x - гауссов вектор размера $n \times 1$, $x \sim N(\mu, C)$. В общем случае это сложная задача. Однако, есть ряд частных случаев, для которых она может быть упрощена. Так,

- 1). Если $A = C^{-1}$ и $\mu = 0$, то $x C^{-1} x \sim \chi^2_n$.
- 2). Если $A = C^{-1}$ и $\mu \neq 0$, то $x C^{-1} x \sim \chi^2_n(\lambda)$, где $\lambda = \mu C^{-1} \mu$.
- 3). Если A идемпотентная (или $A^2 = A$) и имеет ранг r , $C = I$ и $\mu = 0$, то $x^T A x \sim \chi^2_r$

2. Многомерное гауссово распределение было определено в (18). В общем случае оно требует вычисления детерминанта и обращения ковариационной матрицы C . Опишем здесь аппроксимацию определителя и рассмотрим обращение, которое основано на асимптотическом (для больших выборок) анализе собственных чисел ковариационной матрицы. Это допустимо, когда x - вектор данных для стационарного в широком смысле гауссовского случайного процесса с нулевым средним.

В частности, положим $x = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T$, где $x[n]$ - стационарный в широком смысле гауссовский случайный процесс с нулевым средним. Тогда ковариационная матрица для $i=0, 1, \dots, N-1$ становится $[c_{ij}] = E(x[i]x[j]) = r_{xx}[i-j]$.

Например, с учетом того, что $r_{xx}[-k] = r_{xx}[k]$ для $N=4$ имеем

$$C = \begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & r_{xx}[-2] & r_{xx}[-3] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & r_{xx}[-2] \\ r_{xx}[2] & r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] \\ r_{xx}[3] & r_{xx}[2] & r_{xx}[1] & r_{xx}[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[1] & r_{xx}[2] & r_{xx}[3] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & r_{xx}[1] & r_{xx}[2] \\ r_{xx}[2] & r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & r_{xx}[1] \\ r_{xx}[3] & r_{xx}[2] & r_{xx}[1] & r_{xx}[0] \end{bmatrix} = R \quad (2.43)$$

Ковариационная матрица сводится к автокорреляционной, обозначаемой R , и выглядит как симметричная теплицева матрица [10]. При $N \rightarrow \infty$ собственные числа λ_i и собственные векторы v_i легко находятся. Обозначим спектральную плотность мощности $S_{xx}(f)$ имеем

$$\lambda_i = S_{xx}(f_i) \quad (2.44)$$

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{N}} [1 \quad e^{j2\pi f_i} \quad \dots \quad e^{j2\pi(N-1)f_i}]^T$$

для $i=0, 1, \dots, N-1$ и $f_i = 1/N$

Собственные числа являются равномерно распределенными выборками спектральной плотности мощности в интервале частот $[0, 1]$, а собственные векторы - векторы дискретного преобразования Фурье. (см. [10], задача 2.8).

Приближение будет хорошим, если длина N данных много больше времени корреляции $x[n]$. Последнее считается эффективной длительностью автокорреляционной функции. Полагая эту длительность равной M , мы требуем $r_{xx}[k] \approx 0$ для $k > M$. Вывод этих результатов можно найти в [12]. Здесь же будет приведено эвристическое обоснование.

Рассмотрим процесс, для которого автокорреляционная функция удовлетворяет $r_{xx}[k] \approx 0$ для $|k| \geq 2$. Он называется процессом со скользящим средним 1-го порядка. Тогда собственный вектор $\mathbf{v} = [v_0, v_1, \dots, v_{N-1}]^T$ матрицы \mathbf{R} должен удовлетворять

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & 0 & 0 \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] \\ 0 & 0 & r_{xx}[1] & r_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

или

$$\begin{aligned} r_{xx}[0]v_0 + r_{xx}[-1]v_1 &= \lambda v_0 \\ r_{xx}[1]v_0 + r_{xx}[0]v_1 + r_{xx}[-1]v_2 &= \lambda v_1 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$r_{xx}[1]v_{N-3} + r_{xx}[0]v_{N-2} + r_{xx}[-1]v_{N-1} = \lambda v_{N-2}$$

$$r_{xx}[1]v_{N-2} + r_{xx}[0]v_{N-1} = \lambda v_{N-1}$$

Игнорируя первое и последнее равенство, имеем

$$r_{xx}[1]v_{n-1} + r_{xx}[0]v_n + r_{xx}[-1]v_{n+1} = \lambda v_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-2 \quad (2.47)$$

Это уравнение выполняется для $1 \leq n \leq N$ вектора $v_n = e^{j2\pi f n}$, поэтому

$$r_{xx}[1]e^{-j2\pi f} e^{j2\pi f n} + r_{xx}[0]e^{j2\pi f n} + r_{xx}[-1]e^{j2\pi f} e^{j2\pi f n} = \lambda e^{j2\pi f n} \quad (2.48)$$

$$\lambda = r_{xx}[1]e^{-j2\pi f} + r_{xx}[0] + r_{xx}[-1]e^{j2\pi f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k]e^{-j2\pi f k} = S_{xx}(f) \quad (2.49)$$

Не считая уравнений с $n=0$ и $n=N-1$, собственный вектор имеет вид

$$[1 \quad e^{j2\pi f} \quad \dots \quad e^{j2\pi(N-1)f}]^T$$

Если мы выберем $f_i = i/N$ для $i=0, 1, \dots, N-1$, то мы сможем получить N собственных векторов \mathbf{v}_i (2.43), которые ортонормированны, как и требуется, и которые соответствуют собственным числам $\lambda_i = S_{xx}(f_i)$. Ясно, что факт того, что первое и последнее выражение ошибочны, не имеет значения при $N \rightarrow \infty$. Заметим также, что собственные векторы выбраны комплексными, даже если матрица \mathbf{R} - действительная матрица. Мы можем также представить собственные векторы в терминах действительных синусов и косинусов [10], хотя комплексное представление гораздо проще.

Поскольку

$$\mathbf{v}_{N-i} = \mathbf{v}_i^* \quad (2.50)$$

$$S_{xx}(f_{N-i}) = S_{xx}(f_i)$$

то разложение по собственным векторам (комплексная диагонализация)

$$\mathbf{R} = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (2.51)$$

где \mathbf{H} - комплексное сопряжение и транспонирование, на самом деле превращает ее в действительную матрицу. В приближении (2.44) мы теперь достаточно просто можем вычислить определитель и обратную матрицу для \mathbf{R} :

$$\det(\mathbf{R}) = \prod_{i=0}^{N-1} \lambda_i = \prod_{i=0}^{N-1} S_{xx}(f_i) \quad (2.52)$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{S_{xx}(f_i)} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (2.53)$$

Эти выражения могут быть полезны в аппроксимации детекторов. Дополнительно, они могут быть использованы для определения асимптотической формы гауссовой плотности вероятности в предположении, что $x[n]$ - это стационарный в широком смысле гауссов случайный процесс с нулевым средним.

Из выражения (18) для $\mathbf{x}=[x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T$ и $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}$

$$\ln(p) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \det(\mathbf{R}) - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \quad (2.54)$$

и, используя (2.52) и (2.53)

$$\begin{aligned} \ln(p) &= -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \prod_{i=0}^{N-1} S_{xx}(f_i) - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{S_{xx}(f_i)} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{x} = \\ &= -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \ln S_{xx}(f_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{S_{xx}(f_i)} |\mathbf{v}_i^H \mathbf{x}|^2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

Но, как показано в [10]

$$|\mathbf{v}_i^H \mathbf{x}|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi f_i n} \right|^2 = I(f_i) \quad (2.56)$$

где $I(f)$ называется периодограммой. Следовательно,

$$\ln(p) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\ln S_{xx}(f_i) + \frac{I(f_i)}{S_{xx}(f_i)} \right) \quad (2.57)$$

В эквивалентной форме

$$\ln(p) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\ln S_{xx}(f_i) + \frac{I(f_i)}{S_{xx}(f_i)} \right) \frac{1}{N} \quad (2.58)$$

а при $N \rightarrow \infty$, это превращается в

$$\ln(p) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln S_{xx}(f) + \frac{I(f)}{S_{xx}(f)} df \quad (2.59)$$

Для более углубленного рассмотрения этого вопроса можно обратиться к [10]. Помимо подробного вывода там также приводится приближенный анализ собственных значений в случае использования комплексных данных.

2.10. Метод Монте-Карло

В том случае, когда мы не можем определить вероятность того, что случайная величина превысит заданное значение аналитически или оценить эту вероятность численно, мы должны прибегнуть к методу компьютерного моделирования Монте-Карло. В задачах обнаружения мы хотим оценить вероятность того, что случайная величина, или статистика T , превысит порог γ , или $\Pr\{T > \gamma\}$. Как пример, если мы наблюдаем массив данных $\{[x[0], x[1], \dots, x[N-1]]\}^T$ где $x[n] \sim N(0, \sigma^2)$ и $x[n]$ - независимые и одинаково распределенные, мы можем оценить



$$\Pr\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right\} > \gamma \quad (2.60)$$

Для этого простого примера легко убедиться, что

$$T = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{N}\right) \quad (2.61)$$

и, следовательно,

$$\Pr\{T > \gamma\} = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma^2 / N}\right) \quad (2.62)$$

Предполагая, однако, что мы не можем определить вероятность ни аналитически, ни численно, мы можем использовать симуляцию, чтобы определить $\Pr\{T > \gamma\}$. Далее показано, как это можно сделать.

Генерирование данных:

1. Сгенерировать N независимых случайных величин. В MATLAB это легко делается так:

$$x = \text{sqrt}(\text{var}) * \text{randn}(N, 1)$$

При этом генерируется $N \times 1$ вектор-столбец, состоящий из случайных величин $x[n]$, где var - дисперсия σ^2 .

2. Вычислить $T = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$ для реализации случайных величин.

3. Повторить процедуру M раз, чтобы получить M реализаций T или $\{T_1, T_2, \dots, T_M\}$

Оценка вероятности:

1. Подсчитать количество T_i , которые превышают γ , и назвать их M_γ

2. Оценить вероятность $\Pr\{T > \gamma\}$ как

$$\hat{p} = \frac{M_\gamma}{M} \quad (2.63)$$

Заметим, что эта вероятность фактически является *оценкой* вероятности, поэтому при написании используется крышка. Выбор числа реализаций M будет влиять на результаты, так что M должна постоянно увеличиваться до тех пор, пока не будет похоже, что вычисленная вероятность сходится.

Если истинная вероятность мала, то M_γ может быть очень маленькой. Например, если $\Pr\{T > \gamma\} = 10^{-6}$, то только около 1 из $M = 10^6$ реализаций превысит γ . В таком случае M нужно брать много больше, чем 10^6 , чтобы обеспечить достоверную оценку вероятности. Можно показать, что если относительная ошибка

$$\varepsilon = \frac{|\hat{p} - p|}{p} \quad (2.64)$$

допускается в $100(1-\alpha)\%$ случаев, то мы должны выбрать M , удовлетворяющую

$$M \geq \frac{Q^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 (1-p)}{\varepsilon^2 p} \quad (2.65)$$

где p - оцениваемая вероятность. Требуемое число реализаций допустимо для определения $\Pr\{T > \gamma\}$ с использованием реализаций Монте-Карло $\{T_1, T_2, \dots, T_M\}$, где реализации получены генерацией **независимых** случайных величин.

Случайные величины T_i не обязательно должны быть гауссовыми в общем случае, но должны быть независимы и одинаково распределены. К примеру, если мы хотим определить $\Pr\{T > \gamma\}$, которая, равна 0.16, с относительной ошибкой $\varepsilon = 0.01$ (1%) для 95% случаев, то

$$M \geq \frac{Q^{-1}(0,025)^2 (1-0,16)}{0,01^2 0,16} \approx 2 \cdot 10^5 \quad (2.66)$$

3. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

3.1. Теорема Неймана-Пирсона



При обсуждении подхода Неймана-Пирсона (фотографии Ежи Неймана 1894-1981) и Карла Пирсона (1857-1936) приведены, соответственно, слева и справа) к обнаружению сигнала сосредоточимся на простом примере проверки гипотез. Предположим, что мы наблюдаем реализацию случайной величины, чья плотность вероятности или $N(0,1)$ или $N(1,1)$.



Следовательно, мы должны определить, $\mu=0$ или $\mu=1$ на основе одного наблюдения $x[0]$. Каждое возможное значение μ можно представить как гипотезу, и таким образом, наша задача - выбрать одну из двух конкурирующих гипотез. Можно сформулировать эту задачу как

$$H_0: \mu = 0$$

$$H_1: \mu = 1$$

(3.1)

где H_0 называется нулевой гипотезой, а H_1 - альтернативной гипотезой. Эта задачу называют также двухальтернативной проверкой гипотез, так как мы должны выбрать между двумя альтернативами. Плотность вероятности для каждой гипотезы показана на рис.3.1.

Разница между средними значениями вызвана тем, что плотность вероятности при гипотезе H_1 смещена вправо. Конечно, на основе одного измерения трудно определить, какая плотность вероятности получена. Однако, разумно было бы выбрать H_1 , если $x[0] > 0.5$, поскольку можно сказать, что если $x[0] > 0.5$, наблюденная выборка более правдоподобна в случае справедливости гипотезы H_1 . На рисунке видно, что если $x[0] > 0.5$, то $p(x[0] | H_1) > p(x[0] | H_0)$. Наш детектор сравнивает наблюденное значение с величиной 0.5, которая позднее будет названа порогом. Отметим, что по этой схеме мы можем выделить два типа ошибок.

Если мы решим, что верна H_1 , а верно H_0 , то в этом случае говорят об ошибке I-го рода. Если же мы решили, что верна H_0 , но справедлива H_1 , то говорят об ошибке II-го рода

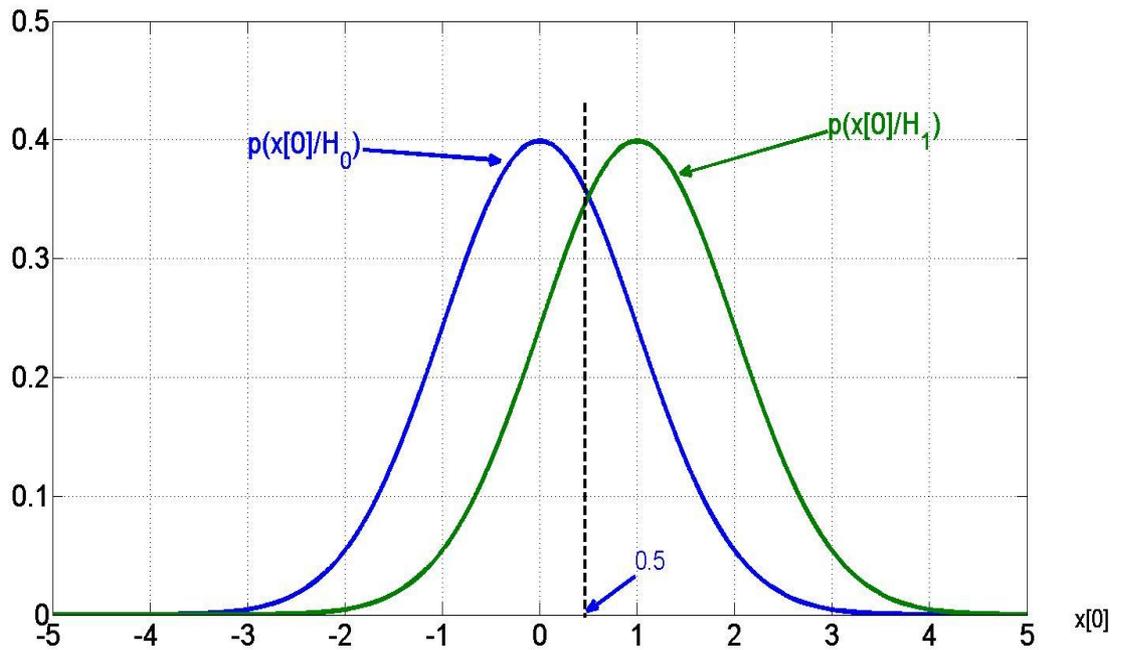


Рис.3.1

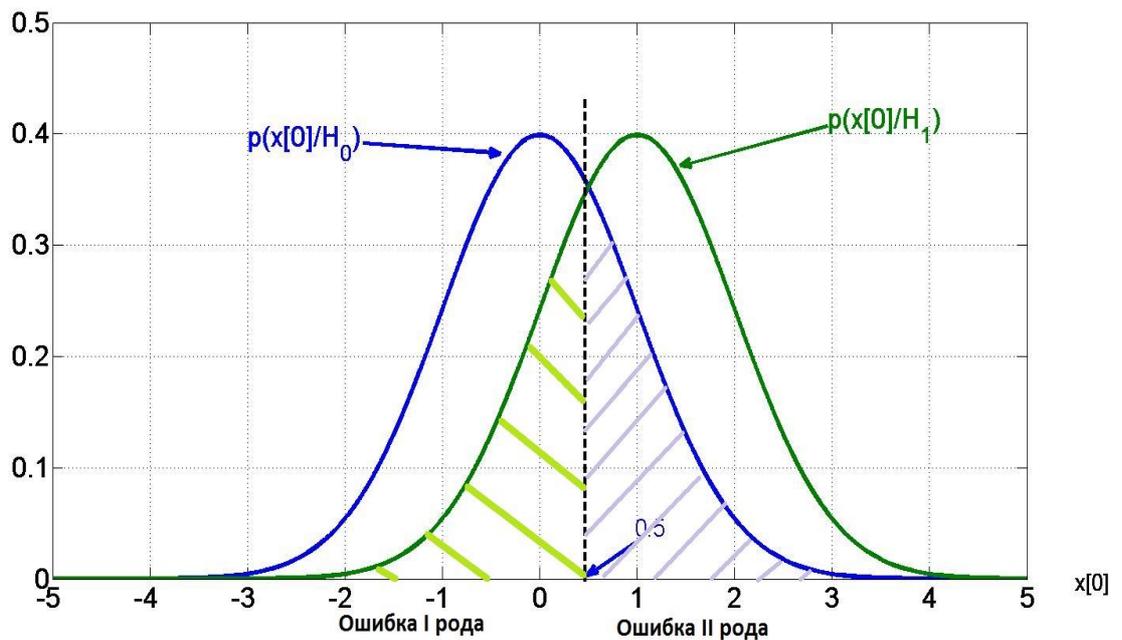


рис.3.2

Обозначение $P[H_i/H_j]$ означает вероятность принятия гипотезы H_i в случае, когда на самом деле верна гипотеза H_j . Ошибки I и II рода показаны заштрихованными областями. Обе они в какой-то степени неизбежны, но могут быть обменяны друг на друга. Чтобы сделать это, мы должны только сменить порог, как показано на рис. 3.3. Ясно, что вероятность ошибки I рода $P[H_1/H_0]$ уменьшилась за счет увеличения вероятности ошибки II рода $P[H_0/H_1]$. Уменьшить вероятности обеих ошибок одновременно невозможно.

Типичным подходом к построению оптимального обнаружителя является ситуация, когда одну вероятность держат фиксированной, в то время как другую стараются минимизировать. Ограничим $[H_1/H_0]$ заданным значением, скажем, α . Если рассматривать задачу (3.1) как классическую двухальтернативную задачу проверки гипотез

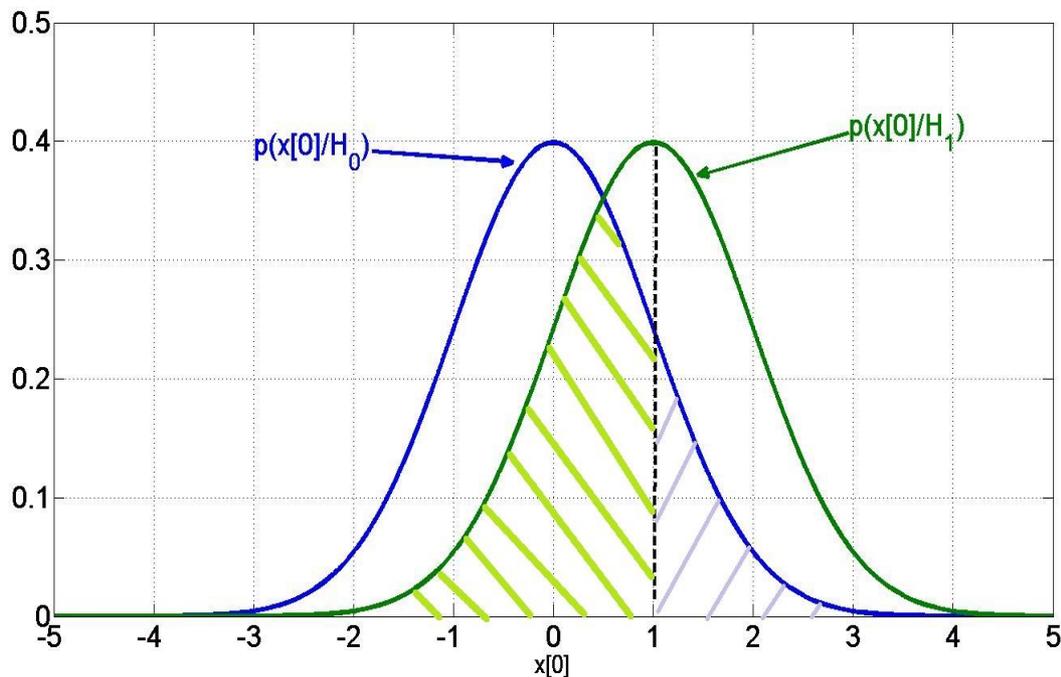


Рис.3.3

$$\begin{aligned} H_0: x[0] &= w[0] \\ H_1: x[0] &= s[0] + w[0] \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $s[0]=1$ и $w[0] \sim N(0,1)$, то получаем задачу обнаружения полезного сигнала. Принимая H_1 при верной H_0 , получаем ложную тревогу, и $P[H_1/H_0]$ называется вероятностью ложной тревоги и обозначается P_{fa} (от англ. false alarm). Обычно это небольшое значение, скажем, 10^{-8} , в соответствии с возможными катастрофическими последствиями. Например, если получены сведения о том, что вражеский самолет присутствует в месте наблюдения, мы можем совершить нападение. В этом случае цена ошибки оказывается очень большой.

Чтобы построить оптимальный детектор, мы будем минимизировать другую ошибку, пропуск цели $P[H_0/H_1]$ или, что эквивалентно, максимизировать величину $1 - P[H_0/H_1] = P[H_1/H_1]$. Применительно к задаче обнаружения $P[H_1/H_1]$ называется вероятностью правильного обнаружения и обозначается как P_{rd} (от англ. right detection). Это и есть критерий Неймана-Пирсона к проверке гипотез или обнаружению сигналов. Мы хотим максимизировать $P_{rd} = P[H_1/H_1]$ при условии ограничения $P[H_1/H_0] = \alpha$.

Возвращаясь к предыдущему примеру, мы можем ограничить P_{fa} , выбрав порог γ , и тогда

$$P_{fa} = P(H_1 / H_0) = \Pr\{x[0] > \gamma/H_0\} = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = Q(\gamma) \quad (3.3)$$

Например, если $P_{fa}=10^{-3}$, $\gamma=3$. Тогда принимаем H_1 , если $x[0]>3$. Кроме того, для этого случая имеем

$$P_{rd} = P(H_1 / H_1) = \Pr\{x[0] > \gamma/H_1\} = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} dt = \quad (3.4)$$

$$= Q(\gamma - 1) = Q(2) = 0.023$$

Возникает вопрос, будет ли вероятность правильного обнаружения $P_{rd}=0.023$ максимальной из всех возможных для этой задачи вероятностей правильного обнаружения. Нашим выбором был детектор, который решает, что справедлива H_1 , если $x[0]>\gamma$. Возможно, если выбирать детектор из других соображений, возможно получить еще большее значение вероятности правильного обнаружения, то есть есть лучший подход?

Перед тем, как ответить на этот вопрос, опишем работу детектора в более общих терминах. Цель детектора - принять решение о том, какая гипотеза справедлива, H_0 или H_1 , на основании наблюдаемой последовательности данных $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$. Это отображение каждого возможного значения данных в решение. Для предыдущего примера области принятия решения показаны на рис.3.4. Детектор можно рассматривать как отображение данных в решение. В частности, пусть R_1 - набор данных в \mathbb{R}^N , который отображает принятие решения H_1 , или

$$R_1 = \{x: \text{принять } H_1 \text{ или отклонить } H_0\}.$$

Эту область в статистике называют критической областью, областью отклонения, а набор точек в \mathbb{R}^N , который отображает в решение гипотезу H_0 - набор, дополняющий R_1 , или

$$R_0 = \{x: \text{принять } H_0 \text{ или отклонить } H_1\}.$$

Ясно, что $R_0 \cup R_1 = \mathbb{R}^N$, поскольку R_0 и R_1 разделяют одно пространство данных. В предыдущем примере область отклонения была $x[0]>3$. Тогда ограничение на вероятность ложной тревоги будет выглядеть как

$$P_{fa} = \int_{R_1} p(\mathbf{x} / H_0) d\mathbf{x} \quad (3.5)$$

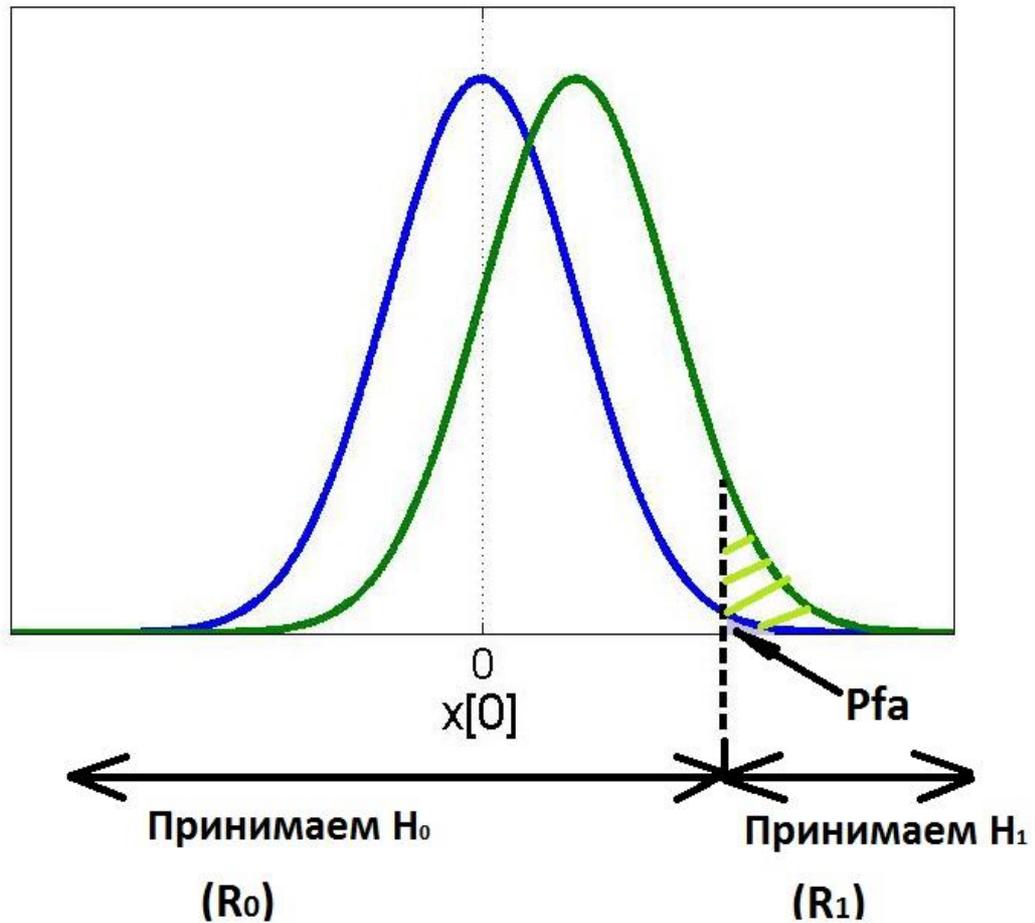


Рис. 3.4

В математической статистике α называется уровнем значимости теста. Здесь это множество наборов данных R_1 , которое удовлетворяет (3.5). Наша задача - выбрать из них один, а именно - тот, который максимизирует

$$P_{rd} = \int_{R_1} p(\mathbf{x} / H_1) d\mathbf{x} \quad (3.6)$$

В статистике P_{rd} называется мощностью критерия и область отклонения, которая достигает максимальной мощности является наилучшей областью отклонения. О том, как выбрать R_1 , если даны $p(\mathbf{x}/H_0)$, $p(\mathbf{x}/H_1)$ и α , говорит **теорема Неймана-Пирсона:**

Чтобы максимизировать P_{rd} для заданного значения $P_{fa}=\alpha$, необходимо принимать гипотезу H_1 в том случае, когда

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} / H_1)}{p(\mathbf{x} / H_0)} > \gamma \quad (3.7)$$

где порог γ находится из выражения

$$P_{fa} = \int_{\{\mathbf{x}: \Lambda(\mathbf{x}) > \gamma\}} p(\mathbf{x} / H_0) d\mathbf{x} = \alpha \quad (3.8)$$

Функция $\Lambda(\mathbf{x})$ называется отношением правдоподобия, поскольку показывает, какая гипотеза, H_0 или H_1 правдоподобна для каждого \mathbf{x} , а весь критерий называется критерием отношения правдоподобия.

3.2. Доказательство теоремы Неймана-Пирсона

Используем множители Лагранжа, чтобы максимизировать P_{rd} для данной вероятности P_{fa} . Формируем функцию Лагранжа:

$$F = P_{rd} + \lambda(P_{fa} - \alpha) = \int_{R_1} p(\mathbf{x} / H_1) d\mathbf{x} + \lambda \left(\int_{R_1} p(\mathbf{x} / H_0) d\mathbf{x} - \alpha \right) = \quad (3.9)$$

$$= \int_{R_1} p(\mathbf{x} / H_1) + \lambda p(\mathbf{x} / H_0) d\mathbf{x} - \lambda \alpha$$

Чтобы максимизировать F , мы должны включить \mathbf{x} в R_1 , если подынтегральное выражение положительно для этих \mathbf{x} , или, другими словами, если

$$p(\mathbf{x} / H_1) + \lambda p(\mathbf{x} / H_0) > 0 \quad (3.10)$$

Если выражение в левой части (3.10) равно нулю, то \mathbf{x} может быть включен либо в R_0 , либо в R_1 . Поскольку вероятность этого события равна нулю (в предположении о непрерывности плотности вероятности), этот случай нас не интересует. Следовательно, знак $>$ в (3.10) и в последующих результатах может быть по желанию заменен на \geq . Таким образом, мы принимаем H_1 , если

$$\frac{p(\mathbf{x} / H_1)}{p(\mathbf{x} / H_0)} > -\lambda \quad (3.11)$$

Множители Лагранжа находятся из ограничения и должны удовлетворять условию $\lambda < 0$. С другой стороны, мы принимаем H_1 , если отношение правдоподобия $p(\mathbf{x}/H_1)/p(\mathbf{x}/H_0)$ превышает отрицательное число. Так как отношение правдоподобия всегда неотрицательно, мы всегда можем принимать H_1 , вне зависимости от гипотез, получая $P_{fa}=1$. Положим $\gamma=-\lambda$, и тогда в итоге мы принимаем H_1 , если

$$\frac{p(\mathbf{x} / H_1)}{p(\mathbf{x} / H_0)} > \gamma \quad (3.12)$$

где $\gamma > 0$ и находится из условия $P_{fa}=\alpha$.

3.3. Примеры применения критерия Неймана-Пирсона

1. Проиллюстрируем применение критерия Неймана-Пирсона, продолжив пример, с которого началась третья глава. Для проверки гипотез (3.1) можно легко построить критерий Неймана-Пирсона. Потребуем $P_{fa}=\alpha=10^{-3}$. Тогда, из (3.7), мы принимаем H_1 , если

$$\frac{p(\mathbf{x} / H_1)}{p(\mathbf{x} / H_0)} > \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x[0]-1)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x[0]^2}} > \gamma \quad (3.13)$$

или

$$e^{-\frac{1}{2}(x^2[0]-2x[0]+1-x^2[0])} > \gamma \quad (3.14)$$

В конечном счете приходим к выражению

$$e^{x[0]-\frac{1}{2}} > \gamma \quad (3.15)$$

В этом месте мы можем определить γ из ограничения для вероятности ложной тревоги:

$$P_{fa} = \Pr \left\{ e^{x[0]-\frac{1}{2}} > \gamma / H_0 \right\} = 10^{-3} \quad (3.16)$$

Это требует знания плотности вероятности $\exp(x[0]-1/2)$. Однако можно подойти к вопросу проще. Заметим, что неравенство (3.15) не изменится, если прологарифмировать обе части, так как логарифм - это монотонно возрастающая функция. С другой стороны, поскольку $\gamma > 0$, мы можем положить $\gamma = \exp \beta$, и тогда получится, что мы принимаем гипотезу H_0 , если

$$e^{x[0]-\frac{1}{2}} > e^\beta \quad (3.17)$$

$$x[0] > \beta + \frac{1}{2} = \ln \lambda + \frac{1}{2} \quad (3.18)$$

Полагая $\gamma' = \ln \gamma + 1/2$, принимаем H_1 , если $x[0] > \gamma'$. Чтобы явно найти γ' (или, что эквивалентно, γ) используем ограничение для P_{fa} :

$$P_{fa} = \Pr \{ x[0] > \gamma' / H_0 \} = 10^{-3} \quad (3.19)$$

$$\int_{\gamma'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 10^{-3} \Rightarrow \gamma' = 3 \quad (3.20)$$

Согласно критерию Неймана-Пирсона, H_1 принимается, если $x[0] > 3$. Таким образом, детектор в предыдущем примере действительно оптимален в смысле Неймана-Пирсона, то есть максимизирует P_{rd} . Как и ранее, найдём

$$P_{rd} = \Pr\{x[0] > 3 / H_1\} = \int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} dt = 0.023 \quad (3.21)$$

Заметим, что характеристика обнаружения плохая. Хотя мы удовлетворили нашему ограничению ложной тревоги, мы сможем обнаружить сигнал лишь в небольшую часть времени. Улучшить характеристики обнаружения возможно, увеличивая P_{fa} , то есть используя обычный обмен. Например, если $P_{fa}=0.5$, то порог находится как

$$\int_{\gamma'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 0.5 \Rightarrow \gamma' = 0 \quad (3.22)$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{rd} &= \Pr\{x[0] > 0 / H_1\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} dt = Q\left(\frac{0-1}{1}\right) = \\ &= Q(-1) = 1 - Q(1) = 0.84 \end{aligned} \quad (3.23)$$

(вспомним главу 2: если $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, то вероятность правого хвоста для порога γ' - это $Q((\gamma' - \mu)/\sigma)$. Изменением порога мы можем сбалансировать вероятности P_{fa} и P_{rd} .

2. Рассмотрим теперь более общую задачу обнаружения сигналов

$$\begin{aligned} H_0: & x[n] = w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ H_1: & x[n] = A + w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

где сигнал $s[n]=A$ для $A>0$, и $w[n]$ - это белый гауссов шум с дисперсией σ^2 . Предыдущий пример - это частный случай, где $A=1$, $N=1$, $\sigma^2=1$. Заметим также, что данная задача на самом деле - это тест для средних значений многомерного гауссова распределения. Действительно, при H_0 $\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$, в то время как при H_1 $\mathbf{x} \sim N(A\mathbf{1}, \sigma^2 \mathbf{I})$, где $\mathbf{1}$ - это единичный вектор. Следовательно, мы имеем эквивалентно

$$\begin{aligned} H_0: & \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \\ H_1: & \boldsymbol{\mu} = A\mathbf{1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Это часто используемая интерпретация параметрического теста для плотностей вероятностей в описании задачи обнаружения сигнала. Теперь детектор, работающий на основе критерия Неймана-Пирсона, принимает H_1 , если

$$\frac{\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n]-A)^2}}{\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]}} > \gamma \quad (3.26)$$

Возьмем логарифм от обеих частей

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \left(-2A \sum_{n=0}^{N-1} x[n] + NA^2 \right) > \ln \gamma \quad (3.27)$$

$$\frac{A}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] > \ln \gamma + \frac{NA^2}{2\sigma^2} \quad (3.28)$$

Поскольку $A > 0$, в конце получаем

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] > \frac{NA^2}{2\sigma^2} \ln \gamma + \frac{A}{2} = \gamma' \quad (3.29)$$

Детектор Неймана-Пирсона сравнивает выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (3.30)$$

с порогом γ' . Это интуитивно обоснованно, поскольку среднее (3.30) задумано как оценка для A . Если оценка большая и положительная, то сигнал, вероятно, присутствует. Насколько большая оценка должна быть, чтобы мы были готовы объявить о присутствии сигнала, зависит от задачи, поскольку решение "только шум" может стать причиной большой ошибки. Чтобы избежать этого, можно регулировать γ' для контроля P_{fa} - большее значение порога уменьшают P_{fa} (так же, как и P_{rd}). Чтобы определить характеристики обнаружения, заметим, что тест-статистика

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (3.31)$$

имеет гауссово распределение для каждой гипотезы. Среднее и дисперсия в этом случае равны

$$E(T(x)/H_0) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E(w[n]) = 0 \quad (3.32)$$

$$\text{var}(T(x)/H_0) = \text{var}\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \text{var}(w[n]) = \frac{\sigma^2}{N} \quad (3.33)$$

Аналогично, $E(T(\mathbf{x})/H_1)=A$ и $\text{var}(T(\mathbf{x})/H_1)=\sigma^2/N$.

Заметим, что выборки шума некоррелированы. Таким образом,

$$T(\mathbf{x}) \sim \begin{cases} N\left(0, \frac{\sigma^2}{N}\right) \text{ при } H_0 \\ N\left(A, \frac{\sigma^2}{N}\right) \text{ при } H_1 \end{cases} \quad (3.34)$$

и далее

$$P_{fa} = \Pr\{T[\mathbf{x}] > \gamma' / H_0\} = Q\left(\frac{\gamma'}{\sigma^2 / N}\right) \quad (3.35)$$

и

$$P_{rd} = \Pr\{T[\mathbf{x}] > \gamma' / H_1\} = Q\left(\frac{\gamma' - A}{\sigma^2 / N}\right) \quad (3.36)$$

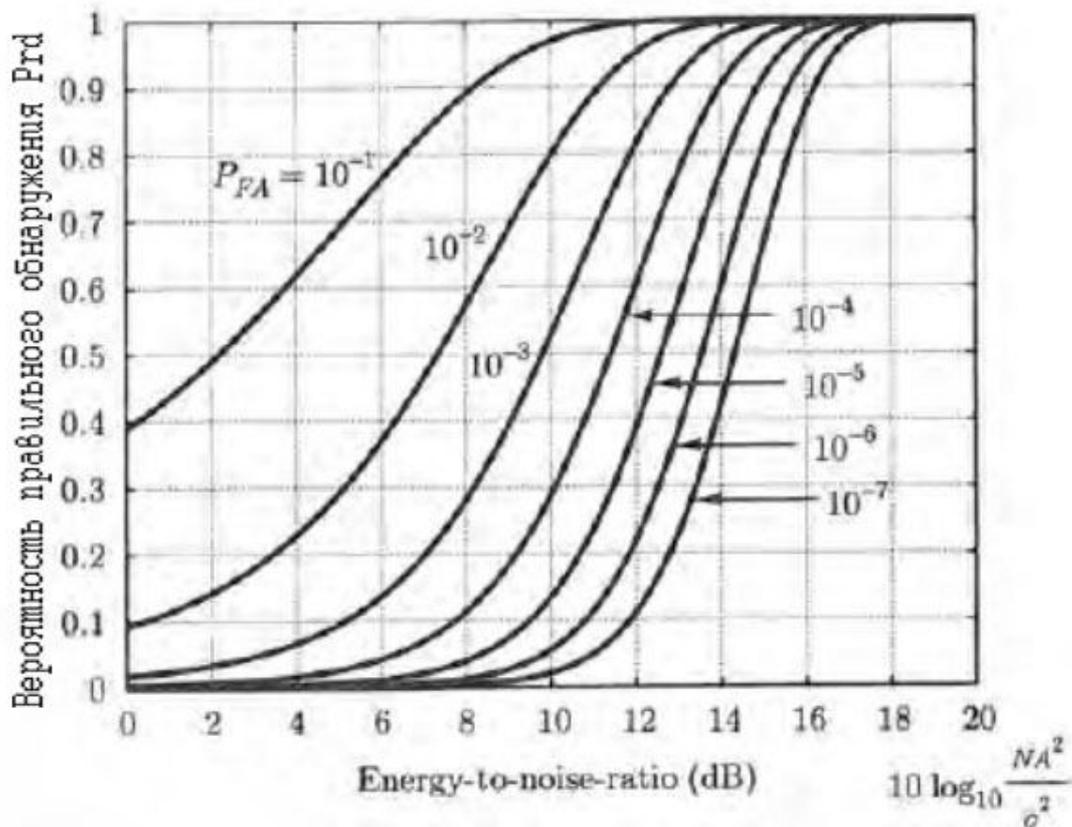
Мы можем найти и прямую связь между вероятностью ложной тревоги и вероятностью правильного обнаружения. Для этого заметим, что функция Q - монотонно убывающая, и, следовательно, $1-Q$ имеет интегральную функцию распределения, которая монотонно возрастает. Таким образом, Q имеет обратную функцию, обозначаемую как Q^{-1} . В результате порог находится из (3.35) как

$$\gamma' = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} Q^{-1}(P_{fa}) \quad (3.37)$$

и

$$\Pr d = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} Q^{-1}(P_{fa}) - A}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}}\right) = Q\left(Q^{-1}(P_{fa}) - \sqrt{\frac{NA^2}{\sigma^2}}\right) \quad (3.38)$$

Из полученных формул видно, что для данной P_{fa} кривые обнаружения возрастают монотонно, как величина NA^2/σ^2 , которая является отношением энергии сигнала к шуму (energy-to-noise ratio, ENR). На рис. 3.5 показаны кривые обнаружения для различных значений P_{fa} .



4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этом пособии, написанном на основе книги, Steaven M Kay "Fundamental Statistical Signal Processing: Detection theory", не издававшейся на русском языке, очень подробно разобраны самые основы статистической обработки сигналов, подходы к которым следуют прямо из статистической теории проверки гипотез. Практически, здесь была рассмотрена простейшая и базовая задача о проверке гипотез в случае полностью известных плотностей вероятности для каждой гипотезы, введены основные понятия отношения правдоподобия, вероятностей ложной тревоги и пропуска цели. В случае, когда плотность вероятности содержит неизвестные параметры, задача существенно усложняется. Автор выражает надежду на то, что читатель не остановится и продолжит изучение основных принципов обработки сигналов самостоятельно, используя приведенный далее список литературы.

Кроме того, во второй главе были приведены справочные материалы по вопросам теории распределений, что может быть использовано при изучении распределений решающих статистик в различных задачах обнаружения.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. : М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.
- [2] Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1989. — 656 с.
- [3] Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. В 3 т. ; пер. с англ. В. Т. Горяинов. – М.: Советское радио, 1975. – 344 с.
- [4] Прокис Дж. Цифровая связь. : Пер. с англ.- М.: Радио и связь, 2000. — 800 с.
- [5] Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов : пер. с англ. М.: Наука, 1979. — 366 с.
- [6] Леман Э. Проверка статистических гипотез. : М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, — 408 с.
- [7] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Учеб. пособие для вузов.— 2-е изд., стер.— М.: Наука.: Высш. шк., 2000. — 480 с.
- [8] Кендалл М., Стюарт А. М. Теория распределений: . — М.: Наука., Физматлит, Т. 1, 1966. — 588 с.
- [9] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., Наука, 1979. —832 с
- [10] Kay S., Fundamentals of statistical signal processing, volumes 1-2., Prentice-Hall, 1993-1998. — 672 pp.
- [11] McDonough R.N., Whalen A.D. Detection of Signals in Noise. —2nd Edition. — Academic Press, 1995. - 492 pp.
- [12] Gray R. M. On the asymptotic eigenvalue distribution of Toeplitz matrices. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 18, November 1972, pp. 725– 730

Олеся Викторовна Болховская

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Электронное учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.