

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
“Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”**

Библиотека Исследовательской школы  
“Колебательно–волновые процессы в природных и искусственных средах”

А.А. Дубков

**КОНСТРУКТИВНАЯ РОЛЬ ШУМА В НЕЛИНЕЙНЫХ  
НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ**

*Учебно–методические материалы для магистрантов и аспирантов*

Нижегород, 2014

**КОНСТРУКТИВНАЯ РОЛЬ ШУМА В НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ:**

Составитель: Дубков А.А. Учебно–методические материалы для магистрантов и аспирантов Исследовательской школы “Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах”. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 37 с.

Учебно–методические материалы предназначены для аспирантов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.06.01 – “Физика и астрономия” (специальности 01.04.03 – “Радиофизика”, 01.04.06 – “Акустика”) и магистрантов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 011800 – “Радиофизика”, 010300 – “Фундаментальная информатика и информационные технологии”. Рассматриваются детально два явления, демонстрирующие конструктивную роль шума в нелинейных динамических системах: стохастический резонанс и ускорение диффузии частиц во флуктуирующих периодических потенциалах. Описана история открытия стохастического резонанса и его обширные практические применения. Проведен строгий расчет условий проявления ускорения броуновской диффузии при наличии внешнего флуктуирующего периодического поля с различной статистикой.

Учебно–методические материалы подготовлены в соответствии с Программой повышения конкурентоспособности Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского среди ведущих мировых научно–образовательных центров на 2013 – 2020 годы и Программой развития Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского как национального исследовательского университета на 2009 – 2018 годы.

# СОДЕРЖАНИЕ

## 1. Стохастический резонанс

1.1. История открытия эффекта

1.2. Экспериментальные наблюдения явления

1.3. Теория стохастического резонанса

а) Движение броуновской частицы в бистабильном потенциале

б) Применение теории линейного отклика

в) Двухуровневая аппроксимация для нелинейного режима стохастического резонанса

## 2. Молекулярные моторы

2.1. Точная формула для эффективного коэффициента диффузии броуновских частиц в быстро флуктуирующем периодическом потенциале

2.2. Ускорение диффузии броуновских частиц в случайно переключающемся симметричном пилообразном потенциале

# 1. Стохастический резонанс

Множество накопившихся экспериментальных фактов указывает на наличие достаточно большого количества неравновесных систем, демонстрирующих индуцированный шумом порядок. Источники шума могут не просто мешать работе нелинейных устройств, к чему уже давно все привыкли, но и, наоборот, существенно увеличивать чувствительность систем к слабым внешним воздействиям и индуцировать некоторые режимы, которые при отсутствии шума нереализуемы. Среди явлений, характеризующихся конструктивной ролью шума, можно выделить стохастический резонанс, резонансную активацию, замедление распада метастабильных и нестабильных состояний, рэтчет-эффект и броуновские моторы, индуцированное шумом образование структур.

В последние три десятилетия особое внимание привлекает к себе явление стохастического резонанса, наблюдающееся в различных системах с пороговой активацией, находящихся под одновременным воздействием шума и когерентной, обычно периодической, силы. При некоторых условиях увеличение интенсивности внутреннего или внешнего шума приводит к усилению внешнего воздействия, а значит, делает систему менее устойчивой. Такое поведение характерно не только для сугубо “технических” устройств, но и для природы в целом. С точки зрения радиофизики, стохастический резонанс – это кооперативный эффект в нелинейных системах, при котором энергия шума, распределенная по широкому спектру, перекачивается в выходную энергию на частоте входного сигнала. При этом амплитуда отклика системы описывается функцией резонансного типа, в которой аргументом является уровень шума. Стохастический резонанс предоставляет возможность усиливать за счет шума сигналы с амплитудой существенно меньшей его интенсивности. В первую очередь, такая возможность интересна в связи с  $kT$ -проблемой, суть которой сводится к вопросу: может ли воздействие с характерной энергией, меньшей средней энергии теплового фона ( $kT$ ), иметь хоть какую-то биологическую значимость? На подобных аргументах, в частности, основан скептицизм по отношению к возможности воздействия на живые ткани слабых электромагнитных волн.

Об активных исследованиях явления стохастического резонанса и его разнообразных приложениях в физике, астрономии, химии, биологии, нейрофизиологии, метеорологии, психологии, экологии, медицине, биофизике, геофизике, океанографии, компьютерных науках и других областях можно судить по количеству изданных монографий [1]–[3] и опубликованных обзорных статей [4]–[10].

## 1.1. История открытия эффекта

Хорошие научные идеи довольно редки, и порой проходит более десятилетия до признания их научным сообществом. История неожиданного открытия стохастического резонанса относится именно к таким примерам.

Еще в XIX веке было обнаружено, что в геологическом прошлом климат Земли не оставался неизменным. Какое-то время назад значительную часть материков северного полушария занимали ледники, но и такое состояние было не всегда, а наступало периодически:

земной климат проходил через стадии ледниковых и межледниковых эпох. Как показали геофизические исследования, за последние 800 тыс. лет ледниковые эпохи, сопровождающиеся понижением уровня Мирового океана на 100 м и более, наступали примерно каждые 100 тыс. лет. Что же вызывает такие глобальные изменения климата и откуда взялась эта странная периодичность?

Основным источником тепла является, как известно, Солнце, а значит, долговременные колебания климата вызываются, по-видимому, изменением потока солнечной энергии, попадающей на Землю. Само Солнце светит достаточно стабильно, однако параметры земной орбиты изменяются со временем. Земная ось медленно прецессирует в пространстве с периодом 27 тыс. лет, а угол ее наклона к плоскости земной орбиты меняется в небольших пределах с периодичностью 41 тыс. лет. Наконец, вытянутость земной орбиты (эксцентриситет) также слегка колеблется. Примерно каждые 100 тыс. лет орбита Земли меняется от совсем круглой до чуть вытянутой и обратно, что вызвано гравитационным воздействием других планет солнечной системы (см. рис. 1).

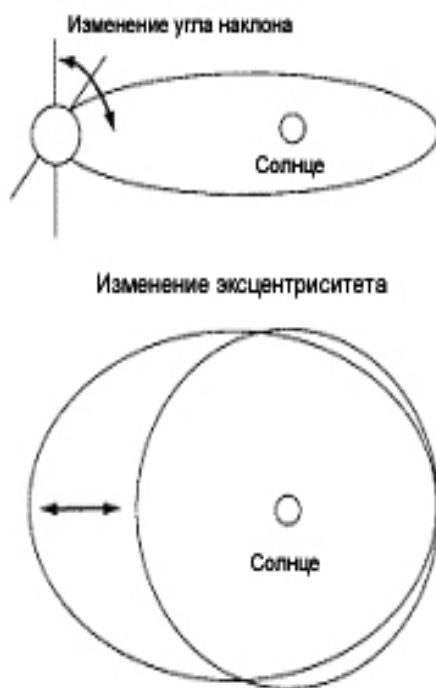


Рис. 1: Колебания угла наклона земной оси к плоскости ее орбиты и колебания эксцентриситета земной орбиты.

На первый взгляд кажется, что причиной ледниковых циклов как раз и являются колебания эксцентриситета. Но здесь есть одна неувязка: эти колебания – самые слабые из всех вышеперечисленных. Колебаниям эксцентриситета, который в настоящее время составляет 0,0167, соответствуют весьма незначительные колебания потока солнечной энергии (всего-то 0,1%), попадающей на Землю за год. Возникает естественный вопрос: способны ли такие слабые возмущения на фоне других, гораздо более сильных и быстро меняющихся воздействий

привести к глобальным изменениям земного климата?

В 1981 г. две научные группы в Риме [11] и Брюсселе [12] заявили о новой идее объяснения наличия почти периодической компоненты в образовании земных льдов или как изменения земной орбиты на сотые доли градуса могут оказывать существенное влияние на климат. Исследователи моделировали явление смены эпох оледенения Земли, используя уравнение для температуры ее поверхности, которое напоминает уравнение движения легкой частицы в вязкой среде в бистабильном потенциальном поле под действием слабого внешнего периодического сигнала и шума. Устойчивым состояниям равновесия этой системы соответствовали крайние положения в колебаниях климата, т.е. состояния, когда планета покрыта континентальным льдом (глобальное оледенение) и когда она свободна ото льда (глобальное потепление). То, что эти состояния климата устойчивы, нетрудно объяснить: Земля, покрытая льдом, отражает основную часть солнечной энергии, температура ее поверхности понижается, что предотвращает таяние ледников. Если же что-то заставит льды растаять, то Земля начнет поглощать гораздо больше солнечной энергии, температура поверхности повысится, что, в свою очередь, будет препятствовать образованию льдов. В указанной модели слабым внешним сигналом (не способным самостоятельно перевести систему из одного положения равновесия в другое) являлись колебания мощности попадающего на Землю солнечного излучения, вызванные изменением эксцентриситета земной орбиты. Аддитивным шумом, индуцирующим случайные переходы между двумя устойчивыми состояниями, служили любые быстротекающие геодинамические явления, например, сезонные колебания температуры.

Суть предложенного авторами механизма проявления слабого сигнала состояла в следующем. При очень слабых флуктуациях переходы между устойчивыми состояниями весьма редки и не могут следовать в такт быстрому внешнему сигналу (см. нижний рис. 2). Наоборот, для больших интенсивностей флуктуаций переходы случаются слишком часто, и их темп опять не зависит от частоты медленного периодического воздействия (см. верхний рис. 2). При некоторой промежуточной (оптимальной) интенсивности шума (см. средний рис. 2) случайные переходы между устойчивыми состояниями начинают следовать за частотой внешнего сигнала и таким образом усиливают его. Это напоминает резонанс, но только вызванный шумом, т.е. стохастический резонанс, согласно предложенной авторами [11] терминологии.

Несмотря на то, что в 2005 году английские геофизики Маслин и Риджвелл в статье [13], посвященной “развенчанию эксцентриситетного мифа”, показали, что реальная значимость колебаний эксцентриситета земной орбиты сильно преувеличена: он не может быть главной причиной цикличности оледенений, эффект стохастического резонанса получил право на самостоятельную жизнь и был впоследствии экспериментально обнаружен в системах порогового типа самой различной природы.

## 1.2. Экспериментальные наблюдения явления

Из физических систем явление стохастического резонанса впервые экспериментально наблюдалось в бистабильной электронной цепи (триггере Шмитта) [14] и двунаправленном

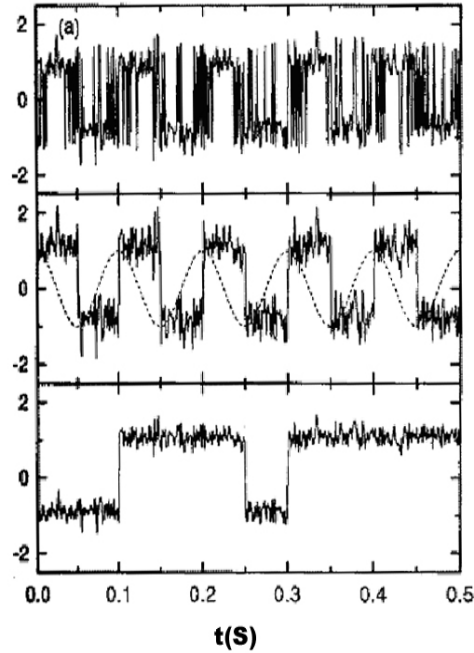


Рис. 2: К объяснению эффекта стохастического резонанса.

кольцевом лазере [15]. В работе [14] на триггер Шмитта с порогом срабатывания  $\Delta U = 200$  мВ подавалось шумовое воздействие и периодический сигнал амплитуды  $A$  на частоте 100 Гц. Пока сигнал был слабый, он не оказывал существенного влияния на экспоненциальную зависимость средней частоты срабатывания триггера от интенсивности шума (кривая  $A = 0$  на рис. 3). С ростом амплитуды подпорогового сигнала эта зависимость качественно менялась: появлялась полоса значений уровня шума, в которой средняя частота переключений практически оставалась постоянной и очень близкой к частоте внешнего сигнала (кривые  $A = 50$  мВ и  $A = 100$  мВ на рис. 3). Это и есть та область, где имеет место эффект захвата частоты, т.е. внешний периодический сигнал в определенном диапазоне интенсивностей шума синхронизирует стохастическую динамику процесса.

Авторы статьи [15] впервые заявили об обнаружении эффекта в бистабильном оптическом устройстве. Двухнаправленный кольцевой лазер является оптической системой с резонатором из трех или более зеркал. Луч в такой системе может распространяться в двух направлениях: по ходу и против хода часовой стрелки. В эксперименте, проведенном в [15], использовался метод слабого периодического модулирования асимметрии между двумя противоположно вращающимися лазерными модами. Как показали измерения, инжектированный в систему шум может привести к заметному увеличению отношения сигнал/шум, а зависимость этого отношения от интенсивности шума имеет характерную резонансную форму (см. рис. 4). В этой же работе впервые предпринята попытка теоретически описать эффект через приближенные уравнения для населенностей устойчивых состояний.

В начале 90-х годов было осознано, что стохастический резонанс может играть ключевую роль в функционировании нейронных сетей и в передаче информации от одной группы нейронов к другой, что вызвало всплеск работ по применениям эффекта в нейродинамике и ней-

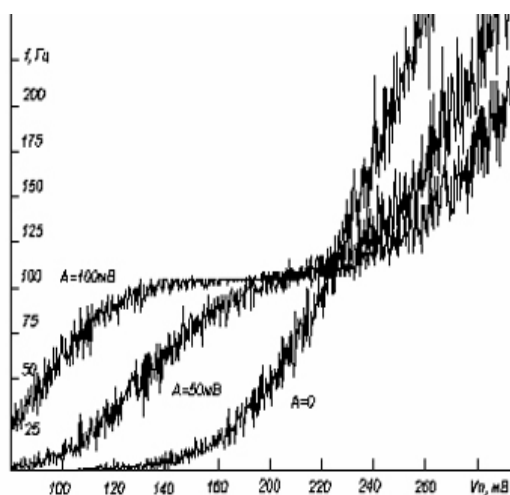


Рис. 3: Зависимость частоты переключений триггера от интенсивности внешнего шума для трех различных значений амплитуды входного сигнала.

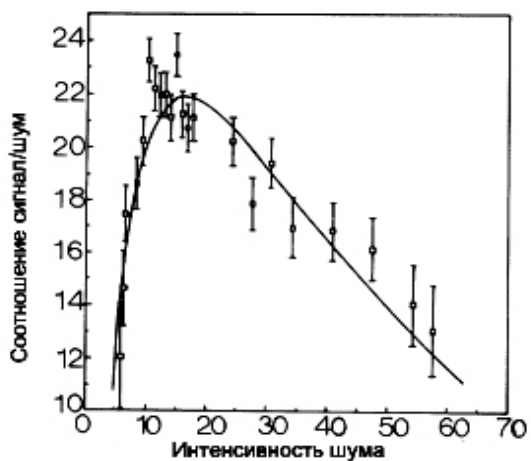


Рис. 4: Зависимость отношения сигнал/шум в двунаправленном кольцевом лазере от интенсивности инжектированного шума. Сплошной линией дана приближенная теоретическая кривая.



рофизиологии. Поскольку биологические системы очень чувствительны и реагируют даже на слабые раздражения, то вполне может быть, что они уже в процессе эволюции выработали возможность эксплуатировать стохастический резонанс за счет оптимизации внутренних источников шума. Прежде всего, естественно было поискать эффект в периферийных отделах центральной нервной системы, т.е. в сенсорных нейронах. Такие нейроны “перерабатывают” входные стимулы в последовательность коротких импульсов (спайков), основной характеристикой которых является распределение межспайковых интервалов. Именно в нем и зашита, например, информация о частоте и амплитуде внешнего синусоидального возмущения. В работе [16] с помощью триггера Шмитта, на который подавались внешний синусоидальный сигнал и широкополосный шум, было экспериментально выявлено, что распределение времен пребывания в устойчивых состояниях, сохраняет все основные особенности гистограммы межспайковых интервалов сенсорного нейрона. Численные расчеты, выполненные в [17] на модели нейрона ФитцХью-Нагумо, подтвердили присутствие стохастического резонанса в гистограмме межспайковых интервалов.

В 1993–1996 гг. появляется целый ряд работ по проявлению стохастического резонанса в физиологических экспериментах на нейронах. Так, в статье [18] было установлено, что возникновение нервного импульса в механорецепторных клетках речного рака как раз и основано на данном эффекте. Как показали специальные исследования, уровень внутреннего шума нейрона возрастает с увеличением интенсивности светового потока, падающего на область фоторецепторов, входящих в шестой нервный узел (см. рис. 5). Этот факт позволил

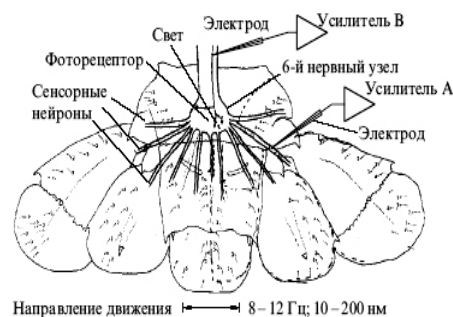


Рис. 5: Система нейрорецепторов хвоста речного рака.

проанализировать степень восприимчивости регулярного сигнала в зависимости от уровня шума. Периодическим сигналом в данном случае служили гидродинамические возмущения, подаваемые на рецепторы рака. Измерения отношения сигнал/шум проводились для различных значений интенсивности светового потока и уверенно подтвердили наличие эффекта стохастического резонанса. Было продемонстрировано, что в сенсорных нейронах явление может наблюдаться не только для синусоидальных, но и широкополосных сигналов [19], и даже для аперiodических стимулов [20] (аперiodический стохастический резонанс).

В 1996 году американцы Левин и Миллер [19], изучая поведение обыкновенного сверчка, обнаружили, что чувствительность его рецепторов возрастала при наложении шумов определенной громкости. Стохастический резонанс помогал сверчку лучше улавливать слабые син-

хронные колебания воздуха и вовремя узнавать о приближении хищника. Упомянем также наблюдение стохастического резонанса в чувствительной нервной системе рыбы-веслоноса [21]. В этом эксперименте веслонос плавал в аквариуме, улавливая электрические сигналы от планктонной добычи Дафнии с целью ее поимки. В систему вносился дополнительный электрический шум, создаваемый помещением двух электродов в аквариум. При этом увеличение интенсивности шума приводило к лучшему обнаружению, т.е. обеспечивало нормальный режим кормления. Дополнительные исследования показали, что “детектор” веслоноса настроен на наиболее оптимальное использование шумов моря и планктонных конгломераций.

Механизм индуцированного шумом порядка был найден даже в мыслительном процессе человека [22]. Идея эксперимента состояла в измерении скорости воспоминаний правил арифметического умножения в присутствии шума. Среднее время ответа становилось минимальным для некоторого оптимального уровня шума. Было показано, что оптимальный уровень шума и величина эффекта зависят от трудности задачи. Результаты эксперимента могут интерпретироваться как проявление стохастического резонанса, а также как объяснение того, почему отдельные люди предпочитают слушать музыку в течение работы, требующей обращения к памяти. Более того, индуцированные шумом явления найдены непосредственно в части мозга, ответственной за обработку изображений. Обнаружено [23], что шум освещения, направленный в левый глаз, улучшает обработку периодического сигнала, посылаемого в правый глаз человека. Эксперименты Дж. Коллинза и его коллег из Бостонского университета [24], [25] убедительно показали, что подпороговый тактильный шум (т.е. слабые беспорядочные вибрации, сами по себе неощутимые пациентом) способны обострять чувство баланса при ходьбе. А это значит, что специальная обувь с хаотически вибрирующей вкладкой в подошве может улучшить координацию пожилых людей или людей с расстройствами баланса.

Стохастический резонанс наблюдался также в оптических ловушках [26], в химических реакциях [27]–[30], в ионных каналах [31], в человеческих мышцах [32], в углеродных нанотрубках [33], при бинокулярном соперничестве изображений [34] и т.д. В качестве разновидностей явления упоминаются аperiodический стохастический резонанс, адаптивный стохастический резонанс, пороговый и сверхпороговый стохастический резонанс, двойной стохастический резонанс, стохастический резонанс, связанный с изменением размеров системы, и даже стохастический резонанс в моностабильных системах [35]. Так, в двойном стохастическом резонансе [36] бистабильность системы индуцируется мультипликативным шумом, а независимый аддитивный шум и внешний синусоидальный сигнал обеспечивают эффект. В работе [37] убедительно доказано, что стохастический резонанс может заметно влиять на формирование климата над Северной Атлантикой. Наконец, в самые последние годы появился ряд сообщений об успешном применении стохастического резонанса при обработке сигналов и компьютерном распознавании изображений.

### 1.3. Теория стохастического резонанса

#### а) Движение броуновской частицы в бистабильном потенциале

Классической моделью стохастического резонанса служит движение броуновской частицы в среде с большой вязкостью в двухъямном потенциальном профиле  $U(x) = -ax^2/2 + bx^4/4$  под действием внешнего периодического поля (см. обзор [7] и библиографию в нем). Такая ситуация может быть описана следующим ланжевеновским уравнением для координаты  $x(t)$  броуновской частицы

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^3 + \xi(t) + A \sin \Omega t, \quad (1)$$

где:  $\xi(t)$  – белый гауссов шум с нулевым средним значением и интенсивностью  $2D$ ,  $A \sin \Omega t$  – внешнее синусоидальное воздействие (сигнал). Задача заключается в отыскании коэффициента усиления сигнала по мощности и выходного отношения сигнал/шум, которое впервые применялось в экспериментальной работе [15] для характеристики стохастического резонанса. Опишем качественно суть происходящего в рассматриваемой системе. В отсутствие внешнего возмущения среднее время переходов броуновских частиц из одной потенциальной ямы в другую зависит от интенсивности шума и от высоты потенциального барьера  $U_0 = a^2/(4b)$ , разделяющего устойчивые состояния равновесия, и может быть при  $D \ll U_0$  приближенно найдено из закона Крамера [38]

$$\tau_{Kr} = \tau_0 e^{U_0/D}. \quad (2)$$

Как видно из рис. 6, слабое периодическое воздействие наклоняет потенциал в одну и другую стороны, уменьшая высоту потенциального барьера, разделяющего два устойчивых состояния равновесия системы, и броуновские частицы начинают эффективно преодолевать его в такт внешнему воздействию, переходя из одной ямы в другую. В результате, при фиксированной частоте входного сигнала зависимости коэффициента его усиления по мощности

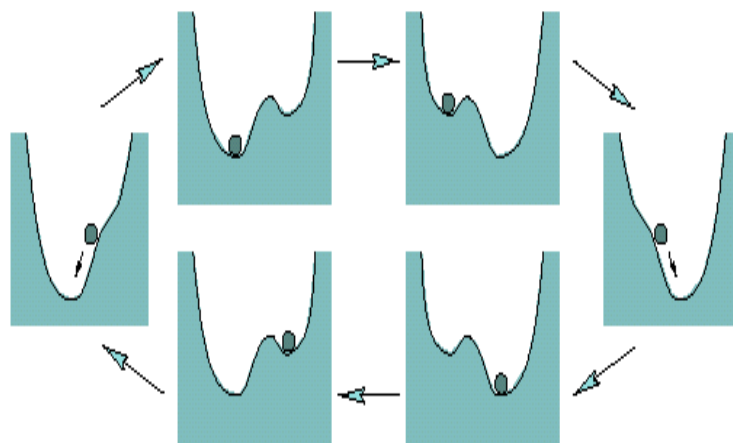


Рис. 6: Схематическая интерпретация явления стохастического резонанса в двухъямном потенциале.

рованной частоте входного сигнала зависимости коэффициента его усиления по мощности

и выходного отношения сигнал/шум от интенсивности шума  $D$  будут иметь резонансную форму с характерным максимумом (см. рис. 7 и рис. 8).

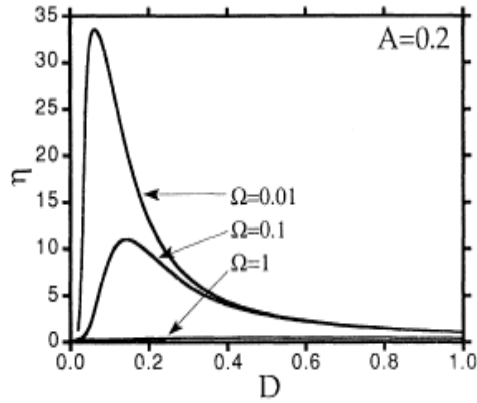


Рис. 7: Резонансная зависимость коэффициента усиления сигнала по мощности от интенсивности шума для различных значений частоты входного воздействия.

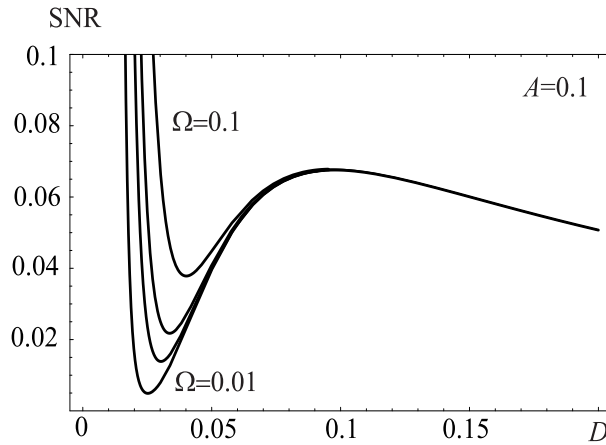


Рис. 8: Резонансная зависимость выходного отношения сигнал/шум от интенсивности шума для различных значений частоты входного воздействия.

Здесь следует упомянуть об одном часто встречающемся в зарубежной литературе заблуждении (см., например, первый раздел обзора [7]). Из вышеприведенных логических рассуждений и рис. 6 вроде бы следует, что оптимальное значение интенсивности шума для слабого сигнала может быть приближенно найдено из равенства среднего времени преодоления барьера (2) в невозмущенном состоянии и половины периода внешнего воздействия  $T = 2\pi/\Omega$ , т.е.

$$\frac{\pi}{\Omega} \simeq \tau_0 e^{U_0/D}. \quad (3)$$

Однако, как видно из равенства (3), в этом случае коэффициент усиления сигнала по мощности  $\eta$  должен был бы достигать максимального значения не только при изменении интенсивности шума  $D$ , определяющей средний темп переходов между состояниями равновесия,

но и при изменении частоты внешнего воздействия  $\Omega$ . Вместе с тем, экспериментально установлено, что зависимость  $\eta(\Omega)$  имеет монотонный характер, и с увеличением  $\Omega$  значение  $\eta$  монотонно уменьшается (см. рис. 7). В работе [39] было показано, что причиной стохастического резонанса является изменение вследствие шума эффективных параметров системы, а именно, упругости и коэффициента затухания по отношению к реакции на входной сигнал.

Для количественного описания явления необходимо определить из исходного ланжевеновского уравнения среднее значение координаты  $\langle x(t) \rangle$  и спектральную плотность ее флуктуаций  $S(\omega)$ . Поскольку процесс  $\langle x(t) \rangle$  остается периодическим с периодом входного сигнала  $T = 2\pi/\Omega$ , то может быть представлен тригонометрическим рядом Фурье

$$\langle x(t) \rangle = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t. \quad (4)$$

Тогда коэффициент усиления по мощности  $\eta$  и выходное отношение сигнал/шум  $SNR$  могут быть найдены из соотношений:

$$\eta = \frac{a_1^2 + b_1^2}{A^2}, \quad SNR = \frac{a_1^2 + b_1^2}{2S(\Omega)}. \quad (5)$$

### б) Применение теории линейного отклика

К сожалению, упомянутые в предыдущем подразделе статистические характеристики невозможно найти точно из уравнения Фоккера–Планка для плотности вероятностей переходов

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [(bx^3 - ax - A \sin \Omega t)W] + D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (6)$$

соответствующего стохастическому уравнению Ланжевена (1). Было предложено много методов приближенного решения данной задачи, но наиболее плодотворным оказался хорошо известный метод теории линейного отклика, основанный на малости амплитуды внешнего воздействия. В рамках этой теории в выражении для среднего значения координаты броуновской частицы оставляют лишь линейный член разложения по внешнему возмущению [40]

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^t R(t - \tau) A \sin \Omega \tau d\tau, \quad (7)$$

где функция линейного отклика  $R(t)$  связана с корреляционной функцией  $K_0(t)$  координаты невозмущенной ( $A = 0$ ) броуновской частицы соотношением

$$R(t) = -\frac{1}{D} \frac{dK_0(t)}{dt}, \quad (8)$$

являющимся одной из форм линейной флуктуационно-диссипационной теоремы [41]. Тогда, в этом приближении коэффициент усиления сигнала по мощности и выходное соотношение

сигнал/шум могут быть найдены, согласно (5) и (7), как

$$\eta = |\chi(i\Omega)|^2, \quad SNR = \frac{A^2 |\chi(i\Omega)|^2}{2 S_0(\Omega)}, \quad (9)$$

где  $\chi(i\omega)$  – линейная восприимчивость, связанная с функцией линейного отклика интегралом Фурье

$$\chi(i\omega) = \int_0^\infty R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (10)$$

а  $S_0(\omega)$  – спектральная плотность координаты невозмущенной броуновской частицы

$$S_0(\omega) = 2 \int_0^\infty K_0(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (11)$$

Из приведенных соотношений (8)-(11) ясно, что для выполнения расчетов в рамках теории линейного отклика достаточно найти корреляционную функцию или спектральную плотность мощности невозмущенного броуновского движения. Однако, даже эта задача весьма не проста в силу нелинейности системы. Для отыскания указанных характеристик часто применяют приближенную процедуру, основанную на разложении Баррета–Лэмпарда [42] для плотности вероятностей переходов, в котором ограничиваются первым слагаемым с минимальным собственным значением сопряженного кинетического оператора уравнения Фоккера–Планка (6) (см. [40]).

Как видно из рис. 9, теория линейного отклика дает хорошее совпадение с результатами численного моделирования лишь в случае слабого внешнего воздействия. С увеличением ам-

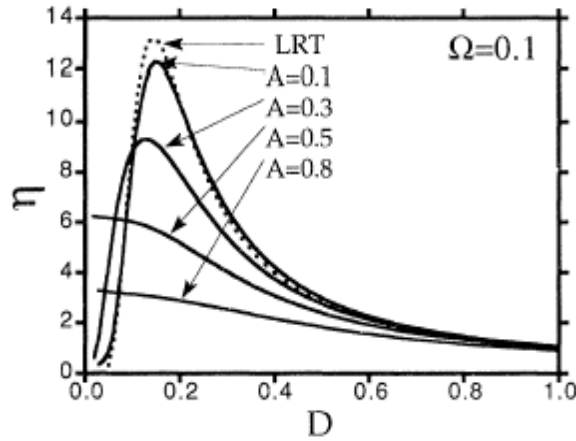


Рис. 9: Результаты расчета коэффициента усиления входного сигнала по мощности в рамках теории линейного отклика (пунктирная линия) для параметров потенциального профиля  $a = b = 1$ . Сплошными линиями показаны результаты численного моделирования системы (1).

плитуды синусоидального сигнала максимум уменьшается по величине, смещаясь в сторону меньших значений интенсивности шума  $D$ , а затем и вовсе исчезает.

Отметим, что условия применимости теории линейного отклика для системы (1) обсуж-

дались в работе [43] путем сравнения с результатами, даваемыми другими методами, и результатами численных расчетов. В частности, было показано, что требуется не только малость амплитуды гармонического сигнала, но существуют и определенные ограничения на его частоту. Авторами оценены также условия применимости линейного приближения для периодического возмущения типа прямоугольной волны.

### в) Двухуровневая аппроксимация для нелинейного режима стохастического резонанса

Как видно из рис. 9, теория линейного отклика не способна адекватно описать явление стохастического резонанса для подпороговых сигналов средней мощности, поскольку пренебрегает зависимостью коэффициента усиления сигнала от его амплитуды. До сих пор вопрос об экспериментально обнаруженной зависимости коэффициента усиления сигнала по мощности и выходного отношения сигнал/шум от амплитуды входного воздействия остается малоизученным. Пожалуй впервые попытка теоретического расчета эффекта в нелинейном режиме была предпринята в работе [44], где авторы применили двухуровневую аппроксимацию. В статьях [45], [46] для более строгого анализа явления стохастического резонанса при воздействии высокочастотных внешних полей предложено использовать логарифмическую восприимчивость, зависимость которой от частоты существенно отличается от обычной (линейной) восприимчивости, фигурирующей в теории линейного отклика. Можно упомянуть и относительно недавно полученные результаты прецизионного численного анализа, выполненного группой испанских ученых [47]. Наконец, в работе [48] выполнен расчет “инерционного” эффекта стохастического резонанса для слабого возмущения путем построения линейного уравнения для сигнала и нелинейного уравнения для шума. Последнее решают в случае малого затухания стандартным методом медленно меняющихся амплитуд.

В статье [44] было использовано представление плотности вероятности выходной переменной в форме суперпозиции двух дельта-функций с фиксированными и симметричными относительно начала координат положениями

$$W(x, t) = P_1(t) \delta(x + c) + P_2(t) \delta(x - c), \quad P_1(t) + P_2(t) = 1, \quad (12)$$

где постоянная  $c$  выбиралась из условия минимизации ошибки расчета дисперсии переменной  $x(t)$ , возникающей при переходе от непрерывной случайной величины к дискретной. В соответствии с (12), среднее значение переменной  $x(t)$  может быть вычислено как

$$\langle x(t) \rangle = c [P_2(t) - P_1(t)]. \quad (13)$$

Для вероятностей обнаружения системы в устойчивых состояниях  $x = -c$  и  $x = c$  записывались феноменологические кинетические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -r_{12}(t)P_1 + r_{21}(t)P_2, \\ \frac{dP_2}{dt} &= -r_{21}(t)P_2 + r_{12}(t)P_1, \end{aligned} \quad (14)$$

а входящие в систему (14) средние темпы переходов  $r_{12}(t)$  и  $r_{21}(t)$  из одного устойчивого состояния в другое определялись из формулы Крамерса (2) с учетом модуляции высоты потенциального барьера внешним периодическим сигналом. Поскольку эта зависимость имеет ярко выраженный нелинейный (экспоненциальный) характер, данные приближенные расчеты следует признать попыткой аналитического исследования нелинейного режима стохастического резонанса. На рис. 10 приведены полученные в [44] теоретические зависимости выходного отношения сигнал/шум от интенсивности шума в сравнении с результатами численного анализа.

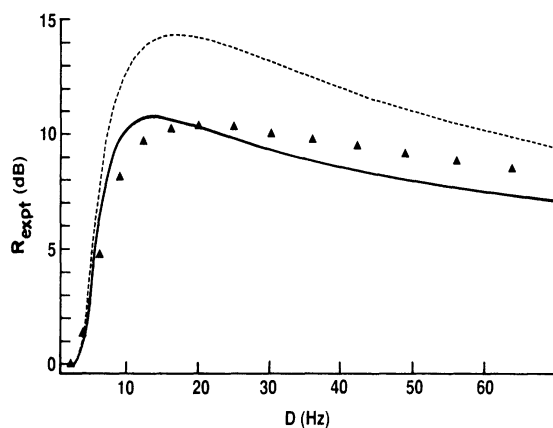


Рис. 10: Теоретические зависимости выходного отношения сигнал/шум для различных значений амплитуды входного воздействия (сплошная и пунктирная кривые) в сравнении с результатами численного эксперимента (треугольники).

Описанное выше двухуровневое приближение имеет целый ряд недостатков. Во-первых, местоположение максимумов плотности вероятности фиксировано, хотя оно изменяется под действием внешнего сигнала. Во-вторых, весьма невразумителен выбор постоянной  $s$ , отвечающей за положение максимумов. В-третьих, система уравнений (14) для “населенностей” является весьма приближенной и не имеет прямого отношения к строгому уравнению Фоккера–Планка (6). Наконец, подсчет средних темпов перехода по формуле Крамерса (2) справедлив лишь для слабых сигналов, что противоречит заявленной задаче.



## 2. Молекулярные моторы

Стохастический транспорт в распределенных системах с асимметричным периодическим потенциалом, находящихся вдали от равновесия, или рэтчет-эффект (см. Рис. 11) все еще является актуальным среди явлений, в которых также проявляется конструктивная роль шума. В 1963 г. Фейнман уже предсказывал, что в присутствии второго теплового резервуа-

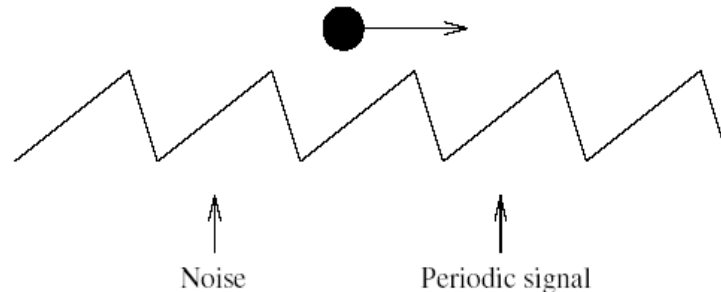


Рис. 11: Стохастический транспорт в рэтчет: шум обеспечивает направленное движение частиц в асимметричном периодическом потенциале, который модулируется гармоническим шумом.

ра данный эффект должен проявлять себя [49]. Затем ранее известные результаты в рамках концепции молекулярных моторов и насосов были развиты в огромном количестве работ по рэтчет-эффекту (см. обзор [50]). Рэтчет-эффект в форме выпрямления тока в СКВИДах в присутствии магнитного поля и несмещенного переменного тока экспериментально наблюдался и интерпретировался теоретически. В основном исследовались две основные модели явления: наклонный рэтчет [51] и мерцающий рэтчет [52].

“Стохастический рэтчет” – процесс, в котором неориентированные неравновесные флуктуации и пространственно анизотропный периодический потенциал приводят к направленному движению. Транспорт в таких рэтчетоподобных потенциалах является механизмом преобразования неравновесных флуктуаций в полезную работу. Под влиянием внешних флуктуаций потенциал случайно переключается между двумя или несколькими возможными конфигурациями. Результирующий ток, генерируемый подобными системами, зависит не только от пространственной асимметрии потенциала, но также и от статистических свойств неравновесных флуктуаций [53].

Мотивация изучения систем подобного типа проистекает из теоретического моделирования молекул кинезина и миозина, которые показывают способность двигаться однонаправленно вдоль структурных элементов таких как микротрубочки и актины (Рис. 12). Длина шага этих молекулярных моторов составляет около 10 нм. Среди большого числа моторных белков миозин скелетных мышц и кинезин из клеток мозга являются наиболее изученными молекулярными моторами. Источником энергии являются молекулы АТФ. Несмотря на то, что математическая модель не может аккуратно описывать какой-либо биологический процесс, мы можем интерпретировать флуктуации потенциала как возникающие из переплетения и диссоциации АТФ, а анизотропный периодический потенциал как представление электростатического потенциала вдоль длинных структурных элементов. Типичный резуль-

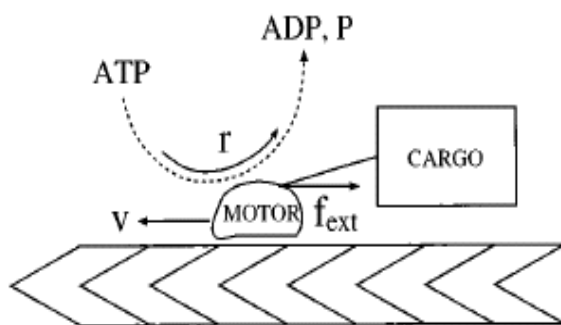


Рис. 12: Схема движения протеина со скоростью  $v$  вдоль цитоскелетного волокна.

тат численного расчета потока броуновских частиц, определяющего среднюю скорость однонаправленного движения, для мерцающего потенциала рэтчет представлен на Рис. 13 [54].

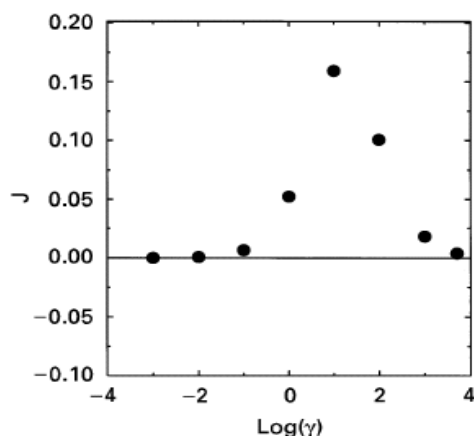


Рис. 13: Зависимость потока броуновских частиц от среднего темпа переключений в двойном логарифмическом масштабе.

Поскольку исследованию рэтчет–эффекта посвящено большое число работ, рассмотрим далее менее изученные особенности диффузии броуновских частиц в симметричных периодических потенциалах, модулируемых симметричными шумами, когда направленный поток частиц отсутствует. В этой ситуации простейшей, отличной от нуля характеристикой является эффективная диффузионная постоянная.

### 2.1. Точная формула для эффективного коэффициента диффузии броуновских частиц в быстро флуктуирующем периодическом потенциале

Задача диффузии броуновских частиц в периодическом потенциале описывает большое множество физических ситуаций таких как диффузия атомов в кристаллах, синхронизация автоколебаний, флуктуации в джозефсоновских сверхпроводящих контактах и др. Точные формулы для эффективного коэффициента диффузии были получены примерно в одно и

тоже время различными методами для произвольного периодического потенциала [55] и для синусоидального потенциала [56] в пределе большой вязкости. В работах [57, 58] были выведены соотношения для средней скорости и диффузионной постоянной броуновских частиц, движущихся в наклонном периодическом потенциале. Случаи изменяющегося во времени периодического потенциала и диффузии в быстро флуктуирующем периодическом поле изучались в [59], где был получен точный результат для коэффициента диффузии во флуктуирующем пилообразном потенциальном профиле. В этом разделе мы обобщим ранее найденное соотношение на случай произвольного периодического потенциального профиля (см. [60]).

В статье А.Н. Малахова [59] было показано, что в быстро флуктуирующем периодическом поле процесс диффузии броуновских частиц может ускоряться по сравнению со случаем свободной диффузии. Однако, точная формула для эффективного коэффициента диффузии  $D_{eff}$  была получена автором лишь для пилообразного потенциального профиля.

Рассмотрим, как и в [59], уравнение Ланжевена для координаты броуновской частицы, движущейся во флуктуирующем периодическом поле  $U(x)$  в режиме передемпфирования,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx}\zeta(t) + \xi(t). \quad (15)$$

Здесь  $\xi(t)$  и  $\zeta(t)$  – статистически независимые белые гауссовы шумы с нулевыми средними значениями  $\langle \xi(t) \rangle = \langle \zeta(t) \rangle = 0$  и интенсивностями  $2D$  и  $2D_\zeta$   $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = 2D\delta(\tau)$ ,  $\langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle = 2D_\zeta\delta(\tau)$ . Будем далее считать потенциал  $U(x)$  четной функцией периода  $L$ , переместив начало координат в один из его минимумов.

Определим эффективный коэффициент диффузии, согласно [55, 56], как предел

$$D_{eff} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle x^2(t) \rangle}{2t} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle. \quad (16)$$

Нетрудно получить из ланжевенского уравнения (15) уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности  $W(x, t)$  координаты броуновской частицы

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D_\zeta \frac{\partial}{\partial x} U'(x) \frac{\partial}{\partial x} U'(x) W + D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (17)$$

Поскольку мы интересуемся асимптотическим поведением среднего квадрата координаты, начальное условие к уравнению (17) можно задать произвольным образом. Поместим в момент  $t = 0$  все броуновские частицы в начало координат:  $W(x, 0) = \delta(x)$ . Тогда в силу четности потенциала  $U(x)$  диффузия при  $t > 0$  будет идти симметрично в обоих направлениях оси  $Ox$ , а поток вероятности в точке  $x = 0$  и  $\langle x(t) \rangle$  будут оставаться равными нулю. Это означает, что для вычисления  $D_{eff}$  в начало координат можно поместить отражающий экран и рассматривать диффузию только в сторону положительных  $x$ .

Далее удобно ввести в рассмотрение Лаплас-образ плотности вероятности

$$Y(x, s) = \int_0^\infty W(x, t) e^{-st} dt.$$

В результате уравнение (17) примет вид обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка для функции  $Y(x, s)$

$$D_\zeta \frac{d}{dx} U'(x) \frac{d}{dx} U'(x) Y + D \frac{d^2 Y}{dx^2} - sY = 0 \quad (x > 0), \quad (18)$$

которое необходимо дополнить условием нормировки плотности вероятности

$$\int_0^\infty Y(x, s) dx = \frac{1}{s}. \quad (19)$$

Линейное однородное уравнение (18) с периодическими коэффициентами, согласно теореме Флоке, имеет решение вида

$$Y(x, s) = e^{-\mu(s)x} \Phi(x, s), \quad (20)$$

где  $\Phi(x, s)$  – периодическая функция координаты  $x$  с тем же периодом  $L$ , а  $\mu(s)$  – характеристический показатель решения. В силу того, что при  $s = 0$  уравнение (18) имеет чисто периодическое решение,  $\mu(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 0$ . Заметим также, что согласно (20),

$$Y(L, s) = e^{-\mu(s)L} Y(0, s). \quad (21)$$

В соответствии с (16) и предельными (тауберовыми) теоремами преобразования Лапласа

$$D_{eff} = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \overline{x_s^2}, \quad (22)$$

где

$$\overline{x_s^2} = \int_0^\infty x^2 Y(x, s) dx = \int_0^\infty x^2 e^{-\mu x} \Phi(x, s) dx = \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \int_0^\infty e^{-\mu x} \Phi(x, s) dx. \quad (23)$$

Поскольку выражение (23) входит под предел (22), нам достаточно найти приближенное значение интеграла при  $s \rightarrow 0$ , т.е. при  $\mu \rightarrow 0$ . С учетом периодичности функции  $\Phi(x, s)$  и условия нормировки (19) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &= \int_0^\infty e^{-\mu x} \Phi(x, s) dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{nL}^{(n+1)L} e^{-\mu x} \Phi(x, s) dx = \\ &= \int_0^L e^{-\mu x} \Phi(x, s) dx \sum_{n=0}^\infty e^{-\mu nL} = \frac{1}{1 - e^{-\mu L}} \int_0^L e^{-\mu x} \Phi(x, s) dx \simeq \frac{1}{\mu L} \int_0^L e^{-\mu x} \Phi(x, s) dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\overline{x_s^2} \simeq \frac{2}{\mu^3 L} \int_0^L e^{-\mu x} \Phi(x, s) dx \simeq \frac{2}{s \mu^2}. \quad (24)$$

Подстановка (24) в (22) приводит к новому выражению для эффективного коэффициента диффузии в форме предела

$$D_{eff} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\mu^2(s)}. \quad (25)$$

Как видно из (25), задача свелась к вычислению характеристического показателя реше-

ния уравнения (18). Его расчет представляет, как правило, известные трудности, поскольку базируется на условии равенства нулю бесконечного детерминанта. Однако, в данном случае удается найти показатель  $\mu(s)$  непосредственно из соотношения (21).

В самом деле, переходя к новой переменной

$$Z(x, s) = \sqrt{D + D_\zeta [U'(x)]^2} \cdot Y(x, s), \quad (26)$$

перепишем уравнение (18) в самосопряженной форме

$$\sqrt{D + D_\zeta [U'(x)]^2} \frac{d}{dx} \sqrt{D + D_\zeta [U'(x)]^2} \frac{dZ}{dx} - sZ = 0. \quad (27)$$

Полученное уравнение путем замены независимой переменной

$$u = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{D + D_\zeta [U'(y)]^2}}$$

сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами и, как следствие, легко решается. Ограниченное решение уравнения (27) в области  $x > 0$  имеет вид

$$Z(x, s) = C_0(s) \exp \left\{ -\sqrt{s} \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{D + D_\zeta [U'(y)]^2}} \right\}, \quad (28)$$

где  $C_0(s)$  – некоторая постоянная, определяемая условием нормировки (19). В силу того, что множитель перед  $Y(x, s)$  в замене (26) является периодической функцией, характеристический показатель решения (28) должен совпадать с  $\mu(s)$ . Из соотношения для  $Z(x, s)$ , аналогичного (21), с учетом (28) находим

$$\mu(s) = \frac{\sqrt{s}}{L} \int_0^L \frac{dy}{\sqrt{D + D_\zeta [U'(y)]^2}}.$$

Подставляя характеристический показатель  $\mu(s)$  в (25), окончательно получаем точную формулу для эффективного коэффициента диффузии броуновских частиц в произвольном флуктуирующем потенциале  $U(x)$

$$D_{eff} = D \left[ \frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{1 + D_\zeta [U'(x)]^2 / D}} \right]^{-2}. \quad (29)$$

Как видно из (29), при любом потенциальном профиле  $U(x)$ :  $D_{eff} > D$ , т.е. диффузия частиц ускоряется по сравнению со случаем  $U(x) = 0$ . Этот результат полностью подтверждает предположение, высказанное ранее в работе [59]. Заметим также, что в отличие от случая постоянного периодического поля [55, 56], значение эффективного коэффициента диффузии определяется не высотой потенциального профиля, а его крутизной  $U'(x)$ .

Рассмотрим далее конкретные виды потенциала  $U(x)$ . Для пилообразного профиля  $U(x) = 2E|x|/L$  при  $|x| \leq L/2$  сразу же приходим к полученному А.Н. Малаховым точному результату

$$D_{eff} = D + D_\zeta \frac{4E^2}{L^2}. \quad (30)$$

Для синусоидального потенциала  $U(x) = E \sin^2(\pi x/L)$  формула (29) дает значение

$$D_{eff} = \frac{\pi^2 D (1 + \gamma^2)}{4\mathbf{K}^2 \left( \gamma / \sqrt{1 + \gamma^2} \right)}, \quad \gamma = \frac{\pi E}{L} \sqrt{\frac{D_\zeta}{D}}, \quad (31)$$

где  $\mathbf{K}(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода ( $0 < k < 1$ ). При малых интенсивностях модулирующего шума  $D_\zeta$  ( $\gamma \ll 1$ ) из соотношения (31) имеем

$$D_{eff} \simeq D + D_\zeta \frac{\pi^2 E^2}{2L^2}. \quad (32)$$

Формула (32) совпадает с приближенным результатом работы [59], полученным в предположении гауссовости плотности вероятности  $W(x, t)$ . В противоположном случае  $\gamma \gg 1$  можно воспользоваться асимптотической формулой для эллиптического интеграла

$$\mathbf{K}(k) \simeq \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} \quad (k \rightarrow 1),$$

и найти из (31)

$$D_{eff} \simeq \frac{D (\pi\gamma)^2}{4 \ln^2 \gamma} \sim \frac{D_\zeta}{\ln^2 D_\zeta}. \quad (33)$$

Согласно (33), эффективный коэффициент диффузии возрастает с ростом интенсивности модулирующего шума  $D_\zeta$ , но медленнее линейного закона (30). На Рис. 14 представлены зависимости нормированной диффузионной постоянной от интенсивности шума для пилообразного, синусоидального профилей и профиля, состоящего из кусков парабол. Как видно из Рис. 14, ускорение по сравнению со случаем свободной диффузии при модуляции потенциального профиля сторонним белым гауссовым шумом всегда имеет место.

## 2.2. Ускорение диффузии броуновских частиц в случайно переключающемся симметричном пилообразном потенциале

Проанализируем в этом разделе возможность ускорения диффузии в случайно переключающемся периодическом потенциале, удовлетворяющим условию суперсимметрии [61]. Рассмотрим совершенно новый метод вычисления эффективного коэффициента диффузии, отличный от примененного выше при модуляции потенциала белым гауссовым шумом. Он основан на асимптотической аналогии непрерывной диффузии и модели прыжковой диффузии [57] и позволяет свести расчет эффективной диффузионной постоянной к задаче о среднем времени первого достижения границ.

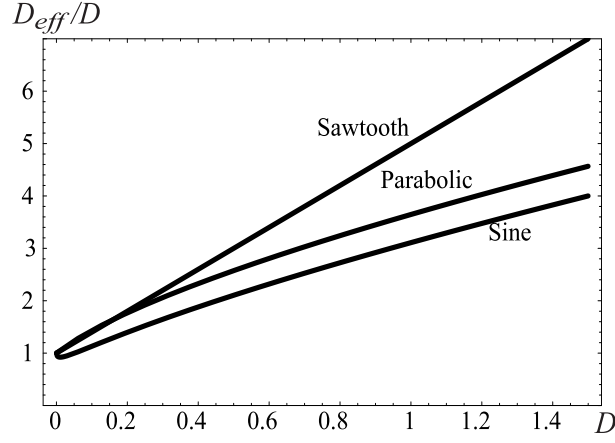


Рис. 14: Зависимости нормированной диффузионной постоянной от интенсивности шума для симметричных потенциальных профилей различного вида, модулируемых внешним гауссовым белым шумом.

Рассмотрим одномерное передемпфированное броуновское движение в случайно переключающемся периодическом потенциале  $U(x)$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx} \eta(t) + \xi(t), \quad (34)$$

где  $x(t)$  – координата броуновской частицы,  $\xi(t)$  – белый гауссов шум с нулевым средним значением и интенсивностью  $2D$ ,  $\eta(t)$  – марковский дихотомический шум, принимающий два значения  $\pm 1$  со средней частотой переключений  $\nu$ . Таким образом, согласно уравнению (34) мы исследуем броуновскую диффузию в периодическом потенциале, переключающемся между двумя конфигурациями  $U(x)$  и  $-U(x)$  (см. Рис. 15). В “перевернутой” конфигурации мак-

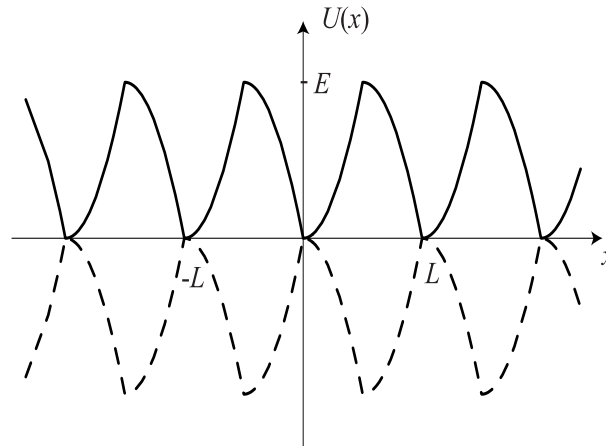


Рис. 15: Переключающийся суперсимметричный потенциал.

симумы потенциала превращаются в минимумы и наоборот. Предположим, что потенциал

$U(x)$  удовлетворяет условию суперсимметрии [58]

$$E - U(x) = U\left(x - \frac{L}{2}\right), \quad (35)$$

где  $L$  – пространственный период потенциала. В соответствии с условием (35) можно переписать исходное уравнение (34) в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} U\left(x + \frac{L}{4}[\eta(t) - 1]\right) + \xi(t). \quad (36)$$

Уравнение (36) показывает, что мы рассматриваем флуктуации потенциала в форме случайных сдвигов на половину периода  $L/2$ .

В подобной ситуации рэтчет–эффект отсутствует:  $\langle \dot{x} \rangle = 0$ , но мы опять постараемся вычислить эффективный коэффициент диффузии броуновских частиц. Поместим для простоты в начальный момент времени  $t = 0$  все броуновские частицы в начало координат. В силу периодичности потенциала процесс диффузии может быть грубо представлен в форме последовательных переходов броуновской частицы из минимумов потенциала  $x_m = mL$  в соседние минимумы  $x_{m\pm 1}$ . Случайное время перехода представляет время выхода через левую или правую поглощающие границы в точках  $x = x_{m\pm 1}$  для частицы, стартующей из точки  $x = x_m$ , т.е. случайное время первого достижения. Таким образом, мы рассматриваем, как и в [57], модель прыжковой диффузии

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^{n(0,t)} q_k, \quad (37)$$

где:  $q_k$  – случайные приращения, принимающие только два значения  $\pm L$ ,  $n(0, t)$  – полное число прыжков, произошедших в интервале времени  $(0, t)$ . В асимптотике  $t \rightarrow \infty$  случайные процессы  $x(t)$  и  $\tilde{x}(t)$  становятся статистически эквивалентными, т.е.  $\langle x^2(t) \rangle \simeq \langle \tilde{x}^2(t) \rangle$ .

Заметим, что хотя случайный процесс  $x(t)$  и не является марковским, он имеет марковскую динамику между переключениями потенциала, т.е. состоит из чередующихся кусков двух марковских процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , удовлетворяющих ланжевеновским уравнениям с аддитивным белым шумом (см. (34))

$$\dot{x}_1 = -U'(x_1) + \xi(t), \quad \dot{x}_2 = U'(x_2) + \xi(t).$$

Случайные приращения  $q_i$  и времена ожидания  $t_j$  между прыжками статистически независимы и одинаково распределены с плотностями вероятности  $W(q)$  и  $w(t)$  соответственно. Плотность вероятности времен ожидания  $t_j$  такова

$$w(t) = \frac{w_+(t) + w_-(t)}{2}, \quad (38)$$

где  $w_+(t)$  и  $w_-(t)$  – вероятностные распределения времени первого достижения соответ-



ственно для конфигурации потенциала с  $\eta(0) = +1$  и для изначально “перевернутой” конфигурации ( $\eta(0) = -1$ ). В силу симметрии потенциала  $U(x)$  и дихотомического шума  $\eta(t)$  вероятности переходов в левый и правый минимумы одинаковы, и поэтому плотность вероятности скачков  $W(q)$  имеет вид

$$W(q) = \frac{1}{2} [\delta(q - L) + \delta(q + L)]. \quad (39)$$

Вычисляя  $\langle \tilde{x}^2(t) \rangle$  из уравнений (37)-(39) и подставляя (16) можно выразить эффективный коэффициент диффузии через среднее время ожидания (см., например, [62])

$$D_{eff} = \frac{L^2}{2\tau}. \quad (40)$$

Согласно (38)  $\tau$  является полусуммой средних времен первого достижения (СВПД)  $\tau_+$  и  $\tau_-$ , соответствующих вероятностным распределениям  $w_+(\tau)$  и  $w_-(\tau)$ .

Для рассматриваемой системы (34) точные уравнения для СВПД, описывающие броуновскую диффузию в случайно переключающихся потенциалах, можно получить из обратного уравнения Фоккера–Планка [63]

$$\begin{aligned} D\tau_+'' - U'(x)\tau_+' + \nu(\tau_- - \tau_+) &= -1, \\ D\tau_-'' + U'(x)\tau_-' + \nu(\tau_+ - \tau_-) &= -1, \end{aligned} \quad (41)$$

где  $\tau_+(x)$  и  $\tau_-(x)$  – СВПД для начальных значений  $\eta(0) = +1$  и  $\eta(0) = -1$  соответственно при стартовой позиции броуновских частиц в точке  $x$ . В силу симметрии мы можем считать начальной точкой  $x = 0$  и решать систему (41) со следующими условиями на поглощающих границах  $x = \pm L$

$$\tau_{\pm}(-L) = 0, \quad \tau_{\pm}(L) = 0. \quad (42)$$

После подстановки  $\tau = [\tau_+(0) + \tau_-(0)]/2$  в (40) получим

$$D_{eff} = \frac{L^2}{\tau_+(0) + \tau_-(0)}. \quad (43)$$

Очевидно, что поток вероятности в точке  $x = 0$  всегда равен нулю, и поэтому можно поместить отражающую границу в начало координат. В результате систему уравнений (41) достаточно решить в области  $(0, L)$  со следующими граничными условиями [63]

$$\tau_{\pm}'(0) = 0, \quad \tau_{\pm}(L) = 0, \quad (44)$$

эквивалентными (42). Вводя вспомогательные функции

$$T(x) = \frac{\tau_+(x) + \tau_-(x)}{2}, \quad \theta(x) = \frac{\tau_+(x) - \tau_-(x)}{2}, \quad (45)$$

можно записать систему (41) в виде

$$\begin{aligned} R' + f(x)\theta' &= -\frac{1}{D}, \\ \theta'' + f(x)R - \frac{2\nu}{D}\theta &= 0, \end{aligned} \quad (46)$$

где  $R(x) = T'(x)$ ,  $f(x) = -U'(x)/D$ . В соответствии с (44) и (45), имеем следующие граничные условия для новой системы (46)

$$R(0) = \theta'(0) = 0, \quad T(L) = \theta(L) = 0. \quad (47)$$

После интегрирования первого уравнения (46) в интервале  $(0, x)$  с учетом граничного условия (47) для  $R(0)$  получаем

$$R(x) = -\frac{x}{D} - \int_0^x f(y)\theta'(y)dy. \quad (48)$$

Подставляя  $R(x)$  во второе уравнение (46), приходим к интегро-дифференциальному уравнению для функции  $\theta(x)$

$$\theta'' - f(x) \int_0^x f(y)\theta'(y)dy - \frac{2\nu}{D}\theta = \frac{xf(x)}{D}. \quad (49)$$

Для отыскания величины  $T(0)$  проинтегрируем соотношение (48) в интервале  $(0, L)$ . В результате найдем

$$T(L) = -\frac{L^2}{2D} - \int_0^L (L-x)f(x)\theta'(x)dx + T(0). \quad (50)$$

Принимая во внимание граничные условия (47) и подставляя  $T(0)$  в (43), приходим окончательно к

$$\frac{D_{eff}}{D} = \left[ 1 + \frac{2D}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) f(x)\theta'(x)dx \right]^{-1}. \quad (51)$$

Соотношения (49) и (51) формально решают поставленную задачу. Знак интегрального слагаемого в (51) определяет ускорение или замедление диффузии по сравнению со случаем свободно диффундирующих частиц. Знак “+” отвечает замедлению, а знак “-” – ускорению. К сожалению, невозможно найти аналитическое решение уравнения (49) для произвольного периодического потенциала  $U(x)$ . Далее мы проанализируем уравнения (49) и (51) для пилообразного периодического потенциала и получим точную формулу для эффективного коэффициента диффузии  $D_{eff}$ .

Рассмотрим симметричный пилообразный периодический потенциал

$$U(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x \leq L/2 \\ k(L-x), & L/2 \leq x \leq L \end{cases}, \quad (52)$$

где  $k = 2E/L$  (см. Рис. 16). Будем решать уравнение (49) отдельно для областей  $0 < x < L/2$

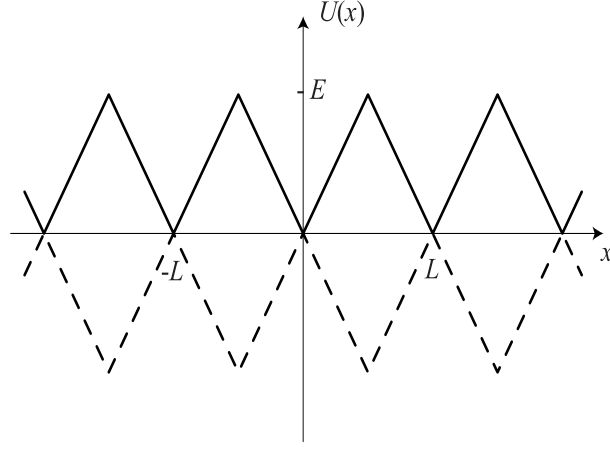


Рис. 16: Переключающийся пилообразный периодический потенциал.

и  $L/2 < x < L$ , используя граничные условия (47)

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(L) = 0, \quad (53)$$

и условия непрерывности функций  $\theta'(x)$  и  $\theta(x)$  в точке  $x = L/2$

$$\theta'\left(\frac{L}{2} - 0\right) = \theta'\left(\frac{L}{2} + 0\right), \quad \theta\left(\frac{L}{2} - 0\right) = \theta\left(\frac{L}{2} + 0\right). \quad (54)$$

Для отыскания решения в интервале  $(0, L/2)$  положим  $f(x) = -k/D$  в уравнении (49). В результате придем к

$$\theta'' - \gamma^2\theta = -\frac{kx}{D^2} - \frac{k^2}{D^2}\theta(0), \quad (55)$$

где  $\gamma = \sqrt{k^2/D^2 + 2\nu/D}$ . Общее решение уравнения (55), удовлетворяющее первому граничному условию (53), таково

$$\begin{aligned} \theta(x) &= c_1 \left( \cosh \gamma x + \frac{k^2}{2\nu D} \right) - \frac{k}{\Gamma^3} (D \sinh \gamma x - \Gamma x), \\ \theta'(x) &= c_1 \frac{\Gamma}{D} \sinh \gamma x - \frac{k}{\Gamma^2} (\cosh \gamma x - 1), \end{aligned} \quad (56)$$

где  $\Gamma = \gamma D$ .

Для решения уравнения (49) в области  $L/2 < x < L$  запишем его в виде

$$\theta'' + f(x) \int_x^L f(y) \theta'(y) dy - \frac{2\nu}{D} \theta = \frac{x f(x)}{D} + f(x) \int_0^L f(y) \theta'(y) dy$$

Подставляя в это уравнение  $f(x) = k/D$  для интервала  $(L/2, L)$  и принимая во внимание второе граничное условие (53), получим

$$\theta'' - \gamma^2\theta = \frac{kx}{D^2} + \frac{k}{D} A, \quad (57)$$

где введена дополнительная неизвестная постоянная

$$A = \int_0^L f(x) \theta'(x) dx. \quad (58)$$

Общее решение уравнения (57) записывается в виде

$$\theta(x) = c_2 \cosh \gamma(x-L) + c_3 \sinh \gamma(x-L) - \frac{kx}{\Gamma^2} - \frac{kD}{\Gamma^2} A. \quad (59)$$

Если положить  $x = L$  в (59) и учесть второе граничное условие (53), придем к

$$c_2 = \frac{k}{\Gamma^2} (L + DA), \quad (60)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \theta(x) &= c_2 [\cosh \gamma(x-L) - 1] + c_3 \sinh \gamma(x-L) + \frac{k(L-x)}{\Gamma^2}, \\ \theta'(x) &= \frac{\Gamma}{D} [c_2 \sinh \gamma(x-L) + c_3 \cosh \gamma(x-L)] - \frac{k}{\Gamma^2}. \end{aligned} \quad (61)$$

Учитывая вид решений (56), (61), условия непрерывности (54) и соотношения (58), (60), нетрудно получить следующую алгебраическую систему уравнений для неизвестных постоянных  $c_1, c_2$  и  $c_3$

$$\begin{aligned} c_1 \sinh \alpha + c_2 \sinh \alpha - c_3 \cosh \alpha &= \frac{kD}{\Gamma^3} (\cosh \alpha - 2), \\ c_1 \left( \cosh \alpha + \frac{k^2}{2\nu D} \right) - c_2 (\cosh \alpha - 1) + c_3 \sinh \alpha &= \frac{kD}{\Gamma^3} \sinh \alpha, \\ c_1 \left( 2 \cosh \alpha - 1 + \frac{k^2}{2\nu D} \right) + \frac{\Gamma^2}{k^2} c_2 &= \frac{2\nu DL}{k\Gamma^2} + \frac{2kD}{\Gamma^3} \sinh \alpha, \end{aligned} \quad (62)$$

где  $\alpha = \gamma L/2$ . Подставляя (56) и (61) в (51) и выполняя интегрирование, находим

$$\begin{aligned} \frac{D_{eff}}{D} &= \\ \left\{ 1 + \frac{2k}{L} \left[ \left( c_1 + \frac{c_3}{2\alpha} - \frac{kD}{2\alpha\Gamma^3} \right) (1 - \cosh \alpha) + \frac{1}{2} \left( c_2 - c_1 + \frac{2kD\alpha}{\Gamma^3} \right) \left( \frac{\sinh \alpha}{\alpha} - 1 \right) - \frac{c_1\Gamma^2}{4\nu D} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (63)$$

Решения системы уравнений (62) таковы

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{4kD\mu^2 (\sinh \alpha - \alpha) \sinh^2 \alpha/2}{\Gamma^3 (1 - 2\mu + 4\mu \cosh \alpha + \mu^2 \cosh 2\alpha)}, \\ c_2 &= \frac{2kD [\mu\alpha (\cosh \alpha + \mu \cosh 2\alpha) + (1 - 2\mu + 3\mu \cosh \alpha) \sinh \alpha]}{\Gamma^3 (1 - 2\mu + 4\mu \cosh \alpha + \mu^2 \cosh 2\alpha)}, \\ c_3 &= \frac{kD [7\mu - 1 - \mu^2 + 2(1 - 4\mu + \mu^2) \cosh \alpha + 3\mu \cosh 2\alpha + 2\mu\alpha (1 - \mu + 2\mu \cosh \alpha) \sinh \alpha]}{\Gamma^3 (1 - 2\mu + 4\mu \cosh \alpha + \mu^2 \cosh 2\alpha)}, \end{aligned} \quad (64)$$

где введен новый безразмерный параметр  $\mu = 2\nu D/k^2$ . Подставляя (64) в (63), приходим окончательно к

$$\frac{D_{eff}}{D} = \frac{2\alpha^2(1+\mu)[1-2\mu+4\mu\alpha_c+\mu^2(\alpha_c^2+\alpha_s^2)]}{2\alpha^2\mu^2(1+\mu)+2\mu(7-\mu+2\alpha^2\mu^2)\alpha_s^2+4\alpha\mu(1-3\mu+4\mu\alpha_c)\alpha_s+4(1-6\mu+\mu^2)(\alpha_c-1)}, \quad (65)$$

где:  $\alpha_c = \cosh \alpha$  и  $\alpha_s = \sinh \alpha$ .

Следует отметить, что формула (65) для эффективного коэффициента диффузии броуновских частиц в переключающемся пилообразном периодическом потенциале получена без каких-либо предположений относительно интенсивности белого шума, среднего темпа переключений и параметров потенциального профиля.

Проанализируем возможность ускорения диффузии в переключающемся пилообразном периодическом потенциале по сравнению со случаем свободной диффузии ( $U(x) = 0$ ). Прежде всего, введем два новых безразмерных параметра, имеющих прозрачный физический смысл,

$$\beta = \frac{E}{D}, \quad \omega = \frac{\nu L^2}{2D}. \quad (66)$$

Параметр  $\beta$  представляет собой отношение высоты потенциального барьера к интенсивности белого шума, и определяет, таким образом, темп активации. Параметр  $\omega$  является отношением между временем свободной диффузии на расстояние  $L$  и средним интервалом времени между переключениями потенциала. Безразмерные параметры  $\alpha$  и  $\mu$ , входящие в формулу (65) для эффективной диффузионной постоянной, выражаются через  $\beta$  и  $\omega$  как

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + \omega}, \quad \mu = \frac{\omega}{\beta^2}. \quad (67)$$

Рассмотрим предельные случаи очень малых и очень больших параметров  $\beta$  и  $\omega$ . При очень медленных переключениях ( $\omega \rightarrow 0$ ), согласно (67), имеем:  $\alpha \simeq \beta$ ,  $\mu \rightarrow 0$ , и соотношение (65) дает

$$\frac{D_{eff}}{D} \simeq \frac{\beta^2}{4 \sinh^2(\beta/2)}, \quad (68)$$

что совпадает с результатом для эффективного коэффициента диффузии в фиксированном пилообразном потенциале (52). Поскольку  $\sinh x > x$  ( $x > 0$ ),  $D_{eff} < D$ , т.е. диффузия замедляется по сравнению со случаем свободной.

В противоположном случае очень быстрых переключений ( $\omega \rightarrow \infty$ ) результат легко предсказывается. Действительно, в этой ситуации броуновские частицы “видят” средний потенциал, т.е.  $[U(x) + (-U(x))]/2 = 0$ , и мы имеем почти свободную диффузию (в отсутствие потенциала). Если положить в (65)  $\alpha \simeq \sqrt{\omega}[1 + \beta^2/(2\omega)] \rightarrow \infty$  и  $\mu = \omega/\beta^2 \rightarrow \infty$ , то получим

$$\frac{D_{eff}}{D} \simeq 1 + \frac{\beta^2}{\omega}. \quad (69)$$

Как показывает формула (69), при быстрых переключениях потенциала всегда имеет место небольшое ускорение диффузии, что подтверждает ранее установленный факт при модуляции потенциала белым гауссовым шумом.

На основе точного результата (65) на Рис. 17 приведены зависимости нормированной эффективной диффузионной постоянной  $D_{eff}/D$  от среднего темпа переключений  $\omega$  для различных значений относительной высоты потенциальных барьеров  $\beta$ . Как видно из Рис. 17,

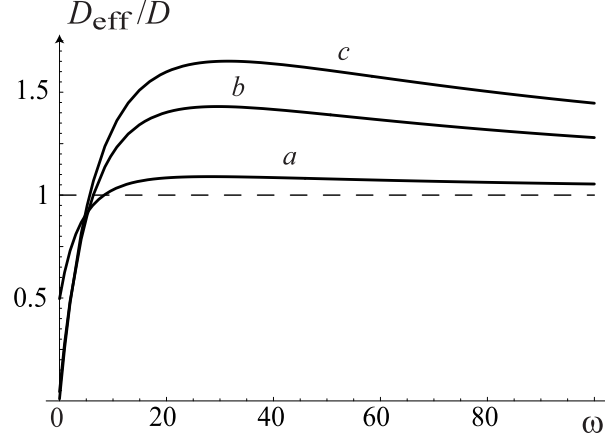


Рис. 17: Зависимость нормированного эффективного коэффициента диффузии от среднего темпа переключений потенциала  $\omega = \nu L^2/(2D)$  для различных значений относительной высоты потенциального барьера. Соответственно  $\beta = 3, 7, 9$  для кривых  $a, b$ , и  $c$ .

зависимость для всех значений  $\beta$  является немонотонной, причем темп диффузии становится больше темпа свободной диффузии, начиная с некоторого значения  $\omega$ . Это значение уменьшается с увеличением высоты потенциального барьера.

В предельном случае  $\beta \ll 1$  из (65) находим

$$\frac{D_{eff}}{D} \simeq 1 + \frac{\beta^2}{2\omega^2 \cosh 2\sqrt{\omega}} \cdot [(1 + 2\omega) \cosh 2\sqrt{\omega} - (4 \cosh \sqrt{\omega} - 3) (1 + 4\sqrt{\omega} \sinh \sqrt{\omega} - 2\omega)]. \quad (70)$$

Как показывает анализ (70), для относительно низких барьеров ускорение диффузии имеет место только для достаточно быстрых переключений:  $\omega > 9.195$ .

Для очень высоких потенциальных барьеров ( $\beta \rightarrow \infty$ ) при заданном среднем темпе переключений  $\nu$  из (67) имеем:  $\alpha \simeq \beta \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\alpha^2 \mu \rightarrow \omega$ . В результате, точная формула (65) переходит в

$$\frac{D_{eff}}{D} = \frac{2}{7} \omega \quad (71)$$

или, в соответствии с (66),

$$D_{eff} = \frac{\nu L^2}{7}. \quad (72)$$

Полученный результат (72) очень интересен: диффузия при супервысоких потенциальных барьерах (или очень глубоких потенциальных ямах) происходит только за счет переключений потенциала. Согласно (72), эффективная диффузионная постоянная зависит только от среднего темпа переключений и пространственного периода потенциала, и не зависит от

интенсивности белого (теплового) шума  $D$ . В случае асимметричного потенциала с очень высоким потенциальным барьером с одной из сторон подобный механизм без диффузионных шагов обеспечивает высокую эффективность броуновского мотора, поскольку этот барьер блокирует обратный поток частиц.

Приведем простое объяснение результата (72). Диффузия практически отсутствует при очень медленных переключениях ( $\nu \rightarrow 0$ ), поскольку броуновские частицы не способны преодолеть столь высокие потенциальные барьеры. Они могут передвигаться в обоих направлениях только за счет переключений потенциала. После первого переключения конфигурации с минимумом в точке  $x = 0$  броуновские частицы очень быстро скатываются в ближайšie потенциальные ямы, расположенные в точках  $x = \pm L/2$ , и затем ждут следующего переключения потенциала. Заменяя  $L$  на  $L/2$  в соотношении (40), получаем  $D_{eff} \simeq L^2/(8\langle\tau\rangle)$ , где  $\langle\tau\rangle = 1/\nu$ . Таким образом, чем меньше средний интервал времени  $\langle\tau\rangle$  между переключениями или чем больше пространственный период  $L$  потенциала, тем выше темп диффузии.

Поведение нормированной эффективной диффузионной постоянной  $D_{eff}/D$  как функции относительной высоты потенциального барьера  $\beta$  для различных значений среднего темпа переключений  $\omega$  приведено на Рис. 18. Заметим, что все кривые имеют немонотонную зависи-

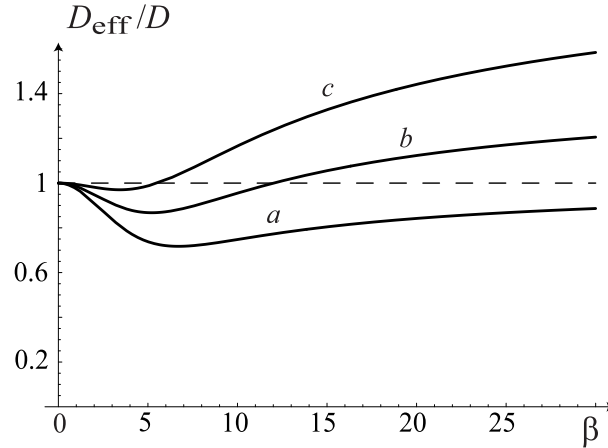


Рис. 18: Зависимость нормированной диффузионной постоянной от относительной высоты потенциальных барьеров  $\beta = E/D$  для различных значений среднего темпа переключения потенциала. Соответственно  $\omega = 3.5, 5, 7$  для кривых  $a, b$ , и  $c$ .

мость. Темп диффузии уменьшается для малых значений  $\beta$  (см. (70)), достигает минимума, а затем стремится к постоянному значению, даваемому формулой (71). Ускорение диффузии наблюдается при любых  $\beta$  только для  $\omega > 9.195$ .

На Рис. 19 серым цветом на плоскости  $(\beta, \omega)$  показана область ускорения диффузии, полученная из (65). Эта область располагается внутри бесконечного прямоугольника  $\beta > 0$  и  $\omega > 3.5$ . Трехмерный график зависимости  $D_{eff}/D$  от  $\beta$  и  $\omega$  приведен на Рис. 20.

Можно сравнить полученный результат (65) с рассмотренным ранее случаем модулирования потенциала внешним белым шумом (см. (30)). Введем формально амплитуду  $a$  марковского дихотомического шума  $\eta(t)$ , заменив  $\beta$  на  $a\beta$ , а затем перейдем к пределу:  $a \rightarrow \infty$ ,  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $a^2/\nu \rightarrow 2D_\eta$ . Как известно, в этом пределе марковский дихотомический шум превра-

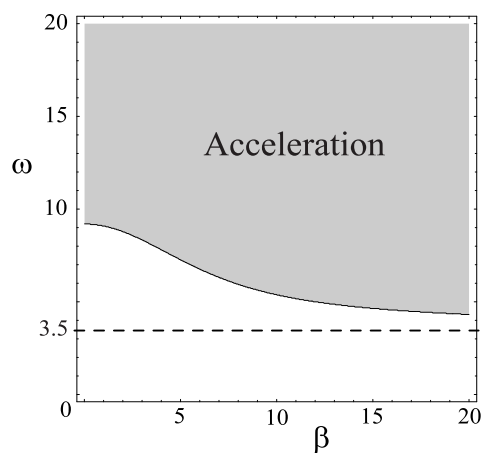


Рис. 19: Серым цветом выделена область параметров на плоскости  $(\beta, \omega)$ , где наблюдается ускорение диффузии по сравнению со случаем свободной диффузии. Здесь  $\beta = E/D$  и  $\omega = \nu L^2/(2D)$ .

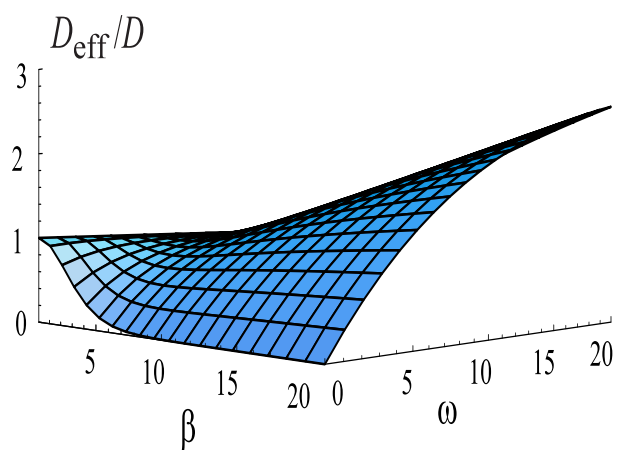


Рис. 20: Трехмерный график зависимости нормированной эффективной диффузионной постоянной от относительной высоты потенциальных барьеров  $\beta$  и среднего темпа переключений потенциала  $\omega$ .



щается в белый гауссов шум с интенсивностью  $2D_\eta$ . В результате из формулы (65) получим

$$D_{eff} = D + k^2 D_\eta. \quad (73)$$

Соотношение (73) совпадает с (30).

Для анализа зависимости эффективного коэффициента диффузии  $D_{eff}$  от коэффициента вязкости  $h$ , отвечающего ситуации, когда невзаимодействующие частицы различного типа движутся в одном и том же периодическом потенциале, заменим в (65)–(67)  $E$  на  $E/h$ ,  $D$  на  $D/h$ , поскольку изначально мы положили в уравнении (34)  $h = 1$ . На Рис. 21 показана зависимость эффективной диффузионной постоянной  $D_{eff}/D$  от коэффициента вязкости  $h$  для различных значений безразмерных параметров  $\beta$  и  $\omega$ . Немонотонный характер поведения эффективной диффузионной постоянной на Рис. 21 доказывает, что с помощью ускорения процесса диффузии можно создать устройство для сортировки частиц различного типа. В

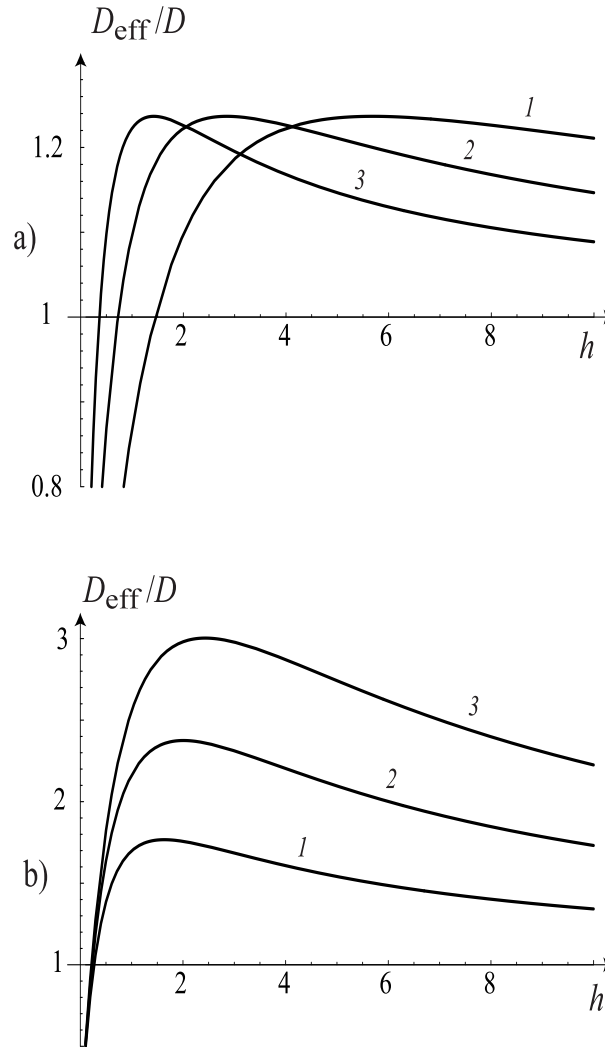


Рис. 21: (а) Нормированная эффективная диффузионная постоянная как функция коэффициента вязкости  $h$  для заданного  $\beta = 5$  и различных значений  $\omega$ : 5, 10, 20; (б) Нормированная эффективная диффузионная постоянная как функция коэффициента вязкости  $h$  для заданного  $\omega = 20$  и различных значений  $\beta$ : 10, 15, 20.

соответствии с законом Стокса для коэффициента вязкости, частицы малого размера будут ускоряться сильнее, чем частицы большого размера при высоком среднем темпе переключений потенциала. Наоборот, при низком темпе переключений большие броуновские частицы будут диффундировать быстрее малоразмерных частиц. Максимум отношения  $D_{eff}/D$  сдвигается в сторону больших значений коэффициента вязкости при уменьшении темпа  $\omega$  для фиксированных значений относительной высоты барьера (Рис. 21а). Рис. 21b демонстрирует ускорение диффузии для фиксированного значения параметра  $\omega = 10$  и различных значений параметра  $\beta$ . Максимум отношения  $D_{eff}/D$  увеличивается с увеличением относительной высоты потенциальных барьеров. Этот эффект связан с увеличением крутизны наклона потенциала, позволяющего частицам быстро скатываться в соседние минимумы.

Приведенные в этом разделе результаты опубликованы в работе [64].

## Список литературы

- [1] Andò B., Graziani S. Stochastic Resonance: Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000.
- [2] Anischenko A., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L. Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems. Springer, Berlin, 2002.
- [3] McDonnell M.D., Stocks N.G., Pearce Ch.E.M., Abbott D. Stochastic Resonance: From Suprathreshold Stochastic Resonance to Stochastic Signal Quantization. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2008.
- [4] Jung P. // Phys. Rep. 1993. V.234. P.175.
- [5] Wiesenfeld K., Moss F. // Nature 1995. V.373. P.33.
- [6] Dykman M.I., Luchinsky D.G., Mannella R., McClintock P.V.E., Stein N.D., Stocks N.G. // Il Nuovo Cimento D 1995. V.17. 661.
- [7] Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P., Marchesoni F. // Rev. Mod. Phys. 1998. V.70. P.223.
- [8] Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. // УФН 1999. Т.169. С.7.
- [9] Wellens Th., Shatokhin V., Buchleitner A. // Rep. Prog. Phys. 2004. V.67. P.45.
- [10] Ward L.M. // Contemp. Phys. 2009. V.50. P.563.
- [11] Benzi R., Sutera A., Vulpiani A. // J. Phys. A: Math. Gen. 1981. V.14. P.L453.
- [12] Nicolis C., Nicolis G. // Tellus. 1981. V.33. P.225.
- [13] Maslin M.A., Ridgwell A.J. // Geological Society, London, Special Publications. 2005. V.247. P.19.

- [14] Fauve S., Heslot F. // Phys. Lett. A 1983. V.97. P.5.
- [15] McNamara B., Wiesenfeld K. // Phys. Rev. Lett. 1988. V.60. P.2626.
- [16] Longtin A., Bulsara A., Moss F. // Phys. Rev. Lett. 1991. V.67. P.656.
- [17] Longtin A. // J. Stat. Phys. 1993. V.70. P.309.
- [18] Douglass J.K., Wilkens L., Pantazelou E., Moss F. // Nature 1993. V.365. P.337.
- [19] Levin J.E., Miller J.P. // Nature 1996. V.380. P.165.
- [20] Collins J.J., Chow C.C., Inhoff T.T. // Phys. Rev. E 1995. V.52. P.R3321.
- [21] Russel D.F., Wilkens L.A., Moss F. // Nature. 1999. V.402. P.291.
- [22] Usher M., Feingold M. // Biol. Cybern. 2000. V.83. P.L11.
- [23] Mori T., Kai S. // Phys. Rev. Lett. 2002. V.88. P.218101.
- [24] Collins J.J., Imhoff T.T., Grigg P. // Nature 1996. V.383. P.770.
- [25] Priplata A., Niemi J., Salen M., Harry J., Lipsitz L.A., Collins J.J. // Phys. Rev. Lett. 2002. V.89. P.238101.
- [26] Simon A., Libchaber A. // Phys. Rev. Lett. 1992. V.68. P.3375.
- [27] Leonard D.S., Reichl L.E. // Phys. Rev. E 1994. V.49. P.1734.
- [28] Guderian A., Dechert G., Zeyer K.-P., Schneider F.W. // J. Phys. Chem. 1996. V.100. P.4437.
- [29] Förster A., Merget M., Schneider F.W. // J. Phys. Chem. 1996. V.100. P.4442.
- [30] Hohmann W., Müller J., Schneider F.W. // J. Phys. Chem. 1996. V.100. P.5388.
- [31] Bezrukov S.M., Vodyanoy I. // Nature 1995. V.378. P.362.
- [32] Cordo P., Inglis J.T., Verschueren S., Collins J.J., Merfeld D.M., Rosenblum S., Buckley S., Moss F. // Nature 1996. V.383. P.769.
- [33] Lee I.Y., Liu X., Kosko B., Zhou C. // Nano Lett. 2003. V.3. P.1683.
- [34] Kim Y.-J., Grabowecky M., Suzuki S. // Vision Research 2006. V.46. P.392.
- [35] Stocks N.G., Stein N.D., McClintock P.V.E. // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. V.26. P.L385.
- [36] Zaikin A.A., Kurths J., Schimansky-Geier L. // Phys. Rev. Lett. 2000. V.85. P.227.
- [37] Ganopolski A., Rahmstorf S. // Phys. Rev. Lett. 2002. V.88. P.038501.
- [38] Kramers H.A. // Physica 1940. V.7. P.284.

- [39] Ланда П.С., Трубецков Д.И., Гусев В.А. // УФН 2009. Т.179. С.255.
- [40] Jung P., Hänggi P. // Phys. Rev. A 1991. V.44. P.8032.
- [41] Callen H.B., Welton T.A. // Phys. Rev. 1951. V.83. P.34.
- [42] Barrett F.J., Lampard D.G. // IRE Trans. on Inform. Theory 1955. V.1. P.70.
- [43] Casado-Pascual J., Gómez-Ordóñez J., Morillo M., Hänggi P. // Europhys. Lett. 2002. V.58. P.342.
- [44] McNamara B. and Wiesenfeld K. // Phys. Rev. A 1989. V.39. P.4854.
- [45] Luchinsky D.G., Mannella R., McClintock P.V.E., Dykman M.I., Smelyanskiy V.N. // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V.32. P.L321.
- [46] Dykman M.I., Golding B., McCann L.I., Smelyanskiy V.N., Luchinsky D.G., Mannella R., McClintock P.V.E. // Chaos. 2001. V.11. P.587.
- [47] Casado-Pascual J. et al // Phys. Rev. Lett. 2003. V.91. P.210601; Phys. Rev. E 2003. V.67. P.036109.
- [48] Landa P.S., Khovanov I.A., McClintock P.V.E. // Phys. Rev. E 2008. V.77. P.011111.
- [49] Feynman R.P., Leighton R.B., and Sands M. The Feynman lectures on physics. V.1, chapter 46. Addison Wesley, Reading MA, 1963.
- [50] Reimann P. // 2002. V.361. P.57.
- [51] Magnasco M.O. // Phys. Rev. Lett. 1993. V.71. P.1477.
- [52] Ajdari A. and Prost J. // C.R. Acad. Sci. Paris. 1992. V.315, Serie II. P.1635.
- [53] Doering C.R., Horsthemke W., Riordan J. // Phys. Rev. Lett. 1994. V.72. P.2984.
- [54] Doering C.R. // Physica A 1998. V.254. P.1.
- [55] Festa R. and d'Agliano E.G. // Physica A. 1978. V.90. P.229.
- [56] Медведев С.Ю., Саичев А.И. // Радиотехника и электроника. 1979. Т.24. С.2058.
- [57] Lindner B., Kostur M., and Schimansky-Geier L. // Fluct. and Noise Lett. 2001. V.1. P.R25.
- [58] Reimann P. et al, // Phys. Rev. Lett. 2001. V.87. P.010602.
- [59] Малахов А.Н. // Письма в ЖТФ. 1998. Т.24. С.9.
- [60] Дубков А.А. // Письма в ЖТФ. 2003. Т.29. С.18.
- [61] Reimann P. // Phys. Rev. Lett. 2001. V.86. P.4992.

[62] Weaver D.L. // *Physica A* 1979. V.98. P.359.

[63] Balakrishnan V., Van den Broeck C., and Hänggi P. // *Phys. Rev. A* 1988. V.38. P.4213.

[64] Spagnolo B., Dubkov A.A., and Agudov N.V. // *Physica A* 2004. V.340. P.265.