МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

Библиотека Исследовательской Школы
«Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах»

А.А. Мальцев, И.В. Артюхин, О.В. Болховская,
Е.А. Домбровский, А.В. Клюев, А.Г. Флаксман

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ РАДИОФИЗИКОВ

Учебно-методические материалы для магистров и аспирантов

Нижний Новгород, 2014

УДК 519.22

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ РАДИОФИЗИКОВ: Составители: Мальцев А.А., Артюхин И.В., Болховская О.В., Домбровский Е.А., Клюев А.В., Флаксман А.Г. Учебно-методические материалы для магистрантов и аспирантов Исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 78 с.

Учебно-методические материалы предназначены для аспирантов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.04.03 – «Радиофизика» и для магистрантов ННГУ, обучающимся по направлению 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии и по направлению 011800 «Радиофизика». Данное учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов, которые в своих исследованиях имеют дело с обработкой случайных процессов и заинтересованы в более глубоком понимании теории случайных процессов, методов их описания и изучения их характеристик.

Учебно-методические материалы подготовлены в соответствии с Программой повышения конкурентоспособности Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013 – 2020 годы и Программой развития Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского как национального исследовательского университета на 2009 -2018 годы.

Оглавление

1. Определение и вероятностное описание случайных процессов

В статистической радиофизике имеют дело с различными физическими величинами, которые изменяются во времени или пространстве (или во времени и пространстве) случайным образом. Если каждому значению независимой переменной t ставится в соответствие конкретное значение зависимой переменной x, то $x(t)$ – детерминированная функция времени.

Определение 1. Если для каждого значения t зависимая переменная x представляет собой случайную величину, то говорят, что $x=x(t)$ есть случайная функция времени или случайный процесс.

Случайный процесс по Слуцкому – это однопараметрическое семейство случайных величин [1]. Это определение принадлежит русскому математику Е.Е. Слуцкому.

Из теории вероятностей известно, что случайная величина задается множеством принимаемых ею значений и вероятностной мерой, задаваемой на этом множестве. По аналогии с определением случайной величины можно дать другое определение случайного процесса.

Определение 2. Случайный процесс (случайная функция времени) $x(t)$ – это есть некое множество детерминированных функций (реализаций случайного процесса) на котором задана вероятностная мера.

Реализации случайного процесса также называют «выборочными функциями», «траекториями случайного процесса», а сам случайный процесс иногда называют стохастическим. Второе определение представляется даже более наглядным, поскольку связано со следующей физической интерпретацией случайного процесса.

Предположим, что на осциллографе наблюдается напряжение с выхода генератора шума. В результате будет получена конкретная детерминированная функция времени – одна из возможных реализаций случайного процесса. Для задания случайного процесса необходимо знать все возможные реализации и вероятность (или частоту) их появления. Предположим, что в нашем распоряжении имеется очень большое число N одинаковых, т.е. управляемых одинаковыми вероятностными законами, генераторов шума $Г_1$, $Г_2$, …, $Г_N$ (см. рис. 1). Такой набор генераторов и соответствующих реализаций называют бесконечным статистическим ансамблем. Этот бесконечный набор реализаций и соответствует математическому понятию случайного процесса.

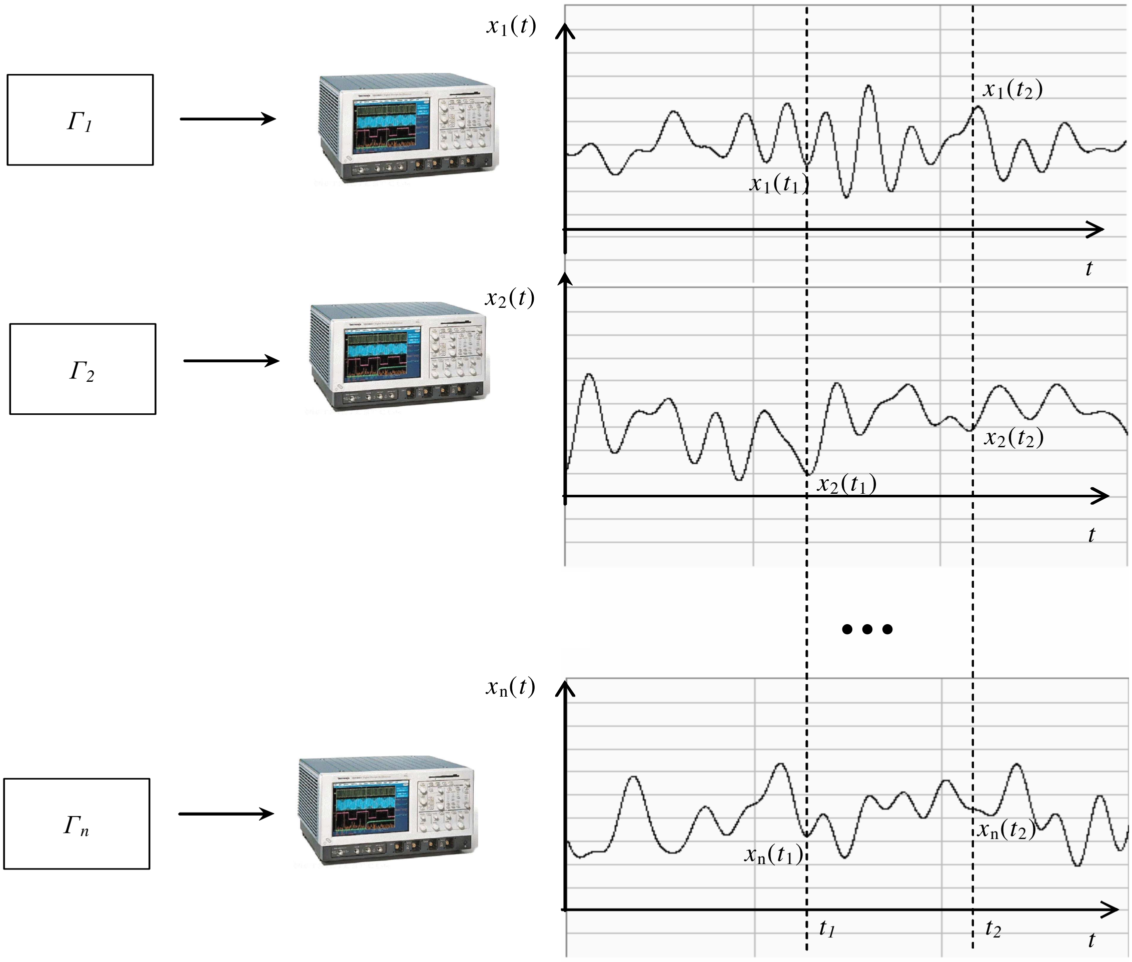

Рис. 1. Набор генераторов, формирующих статистический ансамбль

1.1. Описание случайных процессов

Обозначения случайных процессов. В определении случайного процесса мы имеем зависимость от времени и ансамбля. Это фактически подразумевает, что случайный процесс является функцией двух переменных. Поэтому в строгой математической литературе [2] используют обозначения $\{x(t,\omega),\ t\in T,\ \omega\in\Omega\}$, где Ω - выборочное пространство рассматриваемого эксперимента (или пространство элементарных событий), T – множество индексов времени, непрерывное или дискретное. Тогда для отдельной реализации можно использовать обозначения:

$x(t,\omega_1)$ - детерминированная функция, реализация соответствует событию ω_1 из выборочного пространства Ω,

$x(t,\omega_m)$ - детерминированная функция, реализация соответствует событию ω_m.,

$x(t_1,\omega)$, $x(t_2,\omega)$ – случайные величины, соответствующие значениям случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2, определенные на выборочном пространстве Ω, значения которых и образуют множество элементарных событий или выборочное пространство Ω. Сам случайный процесс записывают как $x(t,\omega)$. Иногда для его обозначения используют [2] большие буквы $X(t)$ – как в теории вероятности или греческие буквы, например, $\xi(t)$. Мы будем использовать обозначение $x(t)$, то есть обозначать случайный процесс как обычную функцию, но помнить, что на самом деле это статистический ансамбль реализаций. При этом детерминированный процесс может рассматриваться как частный случай случайного процесса, имеющего ансамбль, состоящий из одной реализации.

Математическое описание случайных процессов. Зная статистический ансамбль случайного процесса, можно найти вероятностную меру (частоту появления реализаций).

Из определения случайного процесса в общем случае следует, что значение случайного процесса в определенный момент времени t_1 представляет собой случайную величину. Из теории вероятности известно [3,4], что случайная величина полностью задается интегральной функцией распределения или плотностью вероятности $W(x)$. Однако для случайного процесса одномерная плотность вероятности будет в общем случае зависеть от момента времени t (момент времени, в который мы взяли «сечение» статистического ансамбля) как от параметра (см. рис. 2).

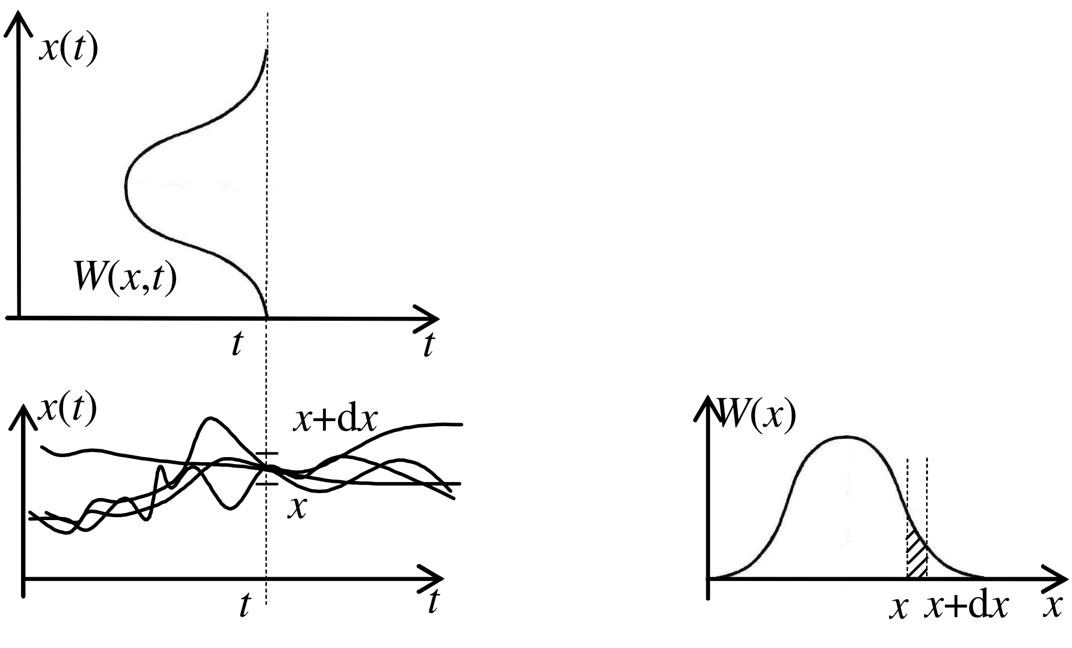

Рис. 2. Одномерная плотность вероятности

То есть одномерная (иногда называемая одномоментная) плотность вероятности будет иметь вид $W_x(x,t)$ (допустимые обозначения так же $W(x_1,t_1)$ или $W(x,t)$). Плотность вероятности является положительнозначной функцией и удовлетворяет условию нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x,t)dx = 1$ для любого t. Физический смысл $W(x,t)$, как и физический смысл плотности вероятности случайной величины – это вероятность прохождения случайного процесса $x(t)$ через «дельта-ворота», расположенные в точке x и имеющие ширину dx.

Вероятность попадания в «дельта-ворота» $P\{x \le x(t) < x + dx\} \cong W(x,t)dx$ можно определить и непосредственно из статистического ансамбля, если мы его имеем.

Подсчитаем m_{dx} - число реализаций (траекторий) СП, прошедших через «ворота» шириной dx в момент времени t. Тогда относительная доля таких «попаданий» к общему числу испытаний M, при $M \to \infty$ и даст оценку этой вероятности, т.е.

$$\underbrace{lim}_{M \to \infty} \frac{m_{dx}}{M} \equiv P\{x \le x(t) < x + dx\} \cong W(x,t)dx . \qquad (1.1.1)$$

Это равенство можно взять за определение вероятности по Мизесу – альтернативное аксиоматическому определению А.Н. Колмогорова [5]. В нашей литературе это определение, за редким исключением, не встречается, но в иностранных технических книгах используется достаточно часто.

Одномерная плотность вероятности случайного процесса позволяет находить все его одномоментные статистические характеристики, и в первую очередь среднее статистическое значение, равное

$$< x(t) > \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} xW(x,t)dx , \qquad (1.1.2)$$

где знак $<\cdots>$ - обозначает усреднение по статистическому ансамблю (или, что эквивалентно, по плотности вероятности).

Средний квадрат случайного процесса

$$< x^2(t) > \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x,t)dx . \qquad (1.1.3)$$

Или, в общем случае среднее по ансамблю значение любой функции от $x(t)$

$$< f[x(t)] > \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) W(x,t) dx \qquad (1.1.4.)$$

Все эти средние в общем случае зависят от времени t, как от параметра.

Одномерная (или одномоментная) плотность вероятности является важной, но далеко не полной характеристикой случайного процесса. Эта плотность вероятностей дает представление о случайном процессе лишь в любой отдельный момент времени, не указывая, как значения $x(t_1)$ в момент t_1 влияют на дальнейшее поведение процесса, например, в точке $t_2>t_1$. Другими словами, эта статистическая характеристика не дает представления о динамике развития случайного процесса. Разные случайные процессы могут иметь одинаковые плотности вероятности $W(x,t)$, хотя их реализации ведут себя по разному (см. рис. 3).

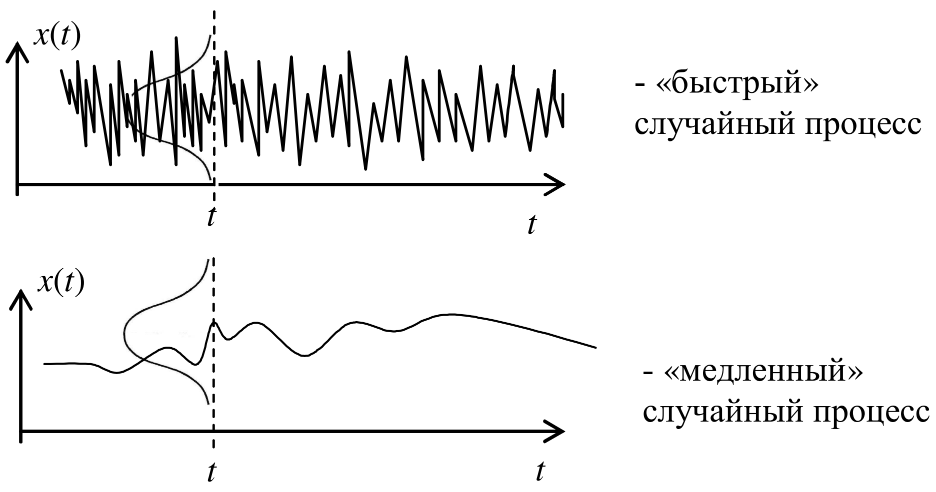

Рис. 3. Быстрый и медленный случайные процессы с одинаковыми одномерными плотностями вероятности

Существенно более полной характеристикой процесса является двумерная плотность вероятности $W(x_1,t_1;x_2,t_2)$, которая определяется следующим выражением:

$$W(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1dx_2 = P\left\{ \begin{matrix} x_1 \le x(t_1) < x_1 + dx_1 \\ x_2 \le x(t_2) < x_2 + dx_2 \end{matrix} \right\} \equiv \lim_{M\to\infty} \frac{m_{dx_1dx_2}}{M} \qquad (1.1.5)$$

Физический смысл двумерной плотности вероятности заключается в том, что она определяет вероятность одновременного прохождения реализаций случайного процесса через пару «ворот», расположенных в точках x_1 и x_2 и имеющих ширину dx_1 и dx_2 (см. рис. 4). Поскольку функция $W(x_1,t_1;x_2,t_2)$ задается для любых значений t_1 и t_2, то она содержит всю информацию о статистической зависимости значений случайного процесса в любые два момента времени (поэтому ее называют еще двух моментной плотностью вероятности).

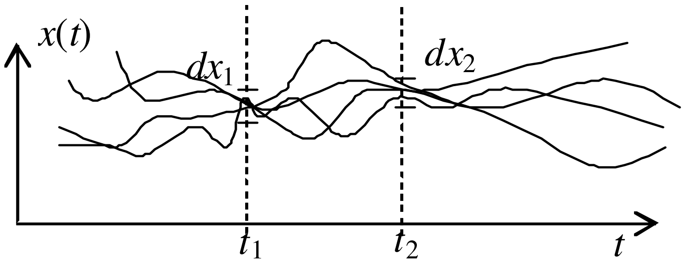

Рис. 4. Физический смысл двумерной плотности вероятностей

Однако, в общем случае двумерная плотность вероятности также не дает исчерпывающего описания случайного процесса. В самом деле, эта функция не дает информацию о статистической взаимозависимости случайного процесса в три, четыре и т.д. моментов времени.

Таким образом, если интересуются взаимосвязью значений случайного процесса в n моментов времени, то требуется задать n-мерную плотность вероятности

$$W(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)dx_1dx_2...dx_n = P\{x_i \le x(t_i) < x_i + dx_i; i=1,2,...,n\}$$

То есть, чем детальнее мы хотим описать случайный процесс, тем большим нужно брать n. В пределе $n \to \infty$. Однако, на практике нет необходимости в использовании бесконечномерных распределений ($n \to \infty$). Достаточно считать, что нам известны конечномерные (n-мерные) распределения, но для всякого сколь угодно большого n.

Таким образом, мы будем считать случайный процесс (функцию) заданным, если известно его n-моментное вероятностное распределение $W(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)$, для любого числа n и произвольных значений t_1, t_2, … t_n. Физически это можно интерпретировать как вероятность прохождения реализаций через n ворот с координатами x_1, x_2,…, x_n в последовательные моменты времени t_1, t_2,…, t_n (см. рис. 5)

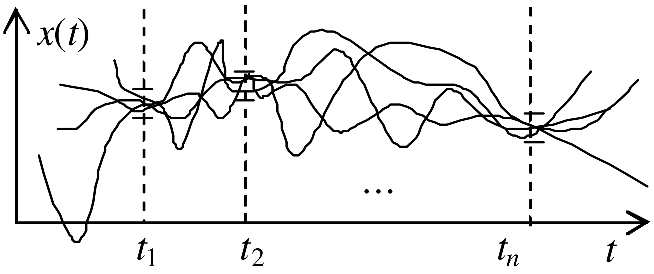

Рис. 5. Физический смысл n-мерной плотности вероятности

1.2. Основные свойства *n*-мерных плотностей вероятности

Плотности вероятности случайного процесса должны удовлетворять следующим условиям:

1. Неотрицательность: $W(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)\geq 0$;

2. Нормировка: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)dx_1dx_2...dx_n=1$;

3. Симметрия: $W(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)=W(x_2,t_2;x_1,t_1;...;x_n,t_n)$

Это свойство означает, что плотности вероятности симметричны относительно любых перестановок пар аргументов (x_i,t_i), i=1,2,…,n. Например, для двумерной плотности вероятности $W(x_1,t_1;x_2,t_2)\equiv W(x_2,t_2;x_1,t_1)$. Это условие становится очевидным, если учесть, что содержание рассматриваемого события – совместное осуществление двух (или «n») неравенств $P\left\{\begin{matrix} x_1\leq x(t_1)<x_1+dx_1\\ x_2\leq x(t_2)<x_2+dx_2\end{matrix}\right\}$ не зависит от того, в каком порядке эти неравенства записываются:

$$\begin{gathered} W(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1dx_2\equiv W(x_2,t_2;x_1,t_1)dx_1dx_2\equiv\\ \equiv P\{X_i\leq X(t_i)<X_i+dX_i\},\quad i=1,\,2\end{gathered}\qquad(1.2.1)$$

4. Согласованность.

Данное свойство означает, что из плотности вероятности большей размерности всегда можно получить плотность вероятности меньшей размерности путем интегрирования по «лишним» аргументам. При любом m<n имеем

$$W_m(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_m,t_m) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m} W_n(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)dx_{m+1}dx_{m+2}...dx_n \quad (1.2.2)$$

Условие согласованности (как и предыдущие условия 1–3) в теории случайных процессов не является тривиальным повторением аналогичного соотношения для плотностей вероятности совокупности случайных величин. Оно ограничивает класс допустимых функций $W(x_1,t_1;$ $x_2,t_{2;...;}$ $x_n,t_n)$, поскольку интегрирование по $x_{m+1},\ldots,x_n$ должно автоматически приводить к результату, не зависящему от параметров t_{m+1}, $t_{m+2},\ldots,$ t_n.

Перечисленные четыре свойства должны выполняться для плотности вероятности любого случайного процесса. Дальнейшее продвижение в изучении случайных процессов связано с их классификацией, то есть рассмотрением более узких классов случайных процессов со специальными свойствами, упрощающими их анализ.

1.3. Условные плотности вероятности

Рассмотрим два момента времени t_1 и t_2. Условная плотность вероятности $W(x_1,t_1/x_2,t_2)$ по определению вводится следующим равенством:

$$W(x_1,t_1;x_2,t_2) = W(x_1,t_1) \cdot W\left(x_2,t_2/x_1,t_1\right), \quad (1.3.1)$$

или, отсюда

$$W\left(x_2,t_2/x_1,t_1\right) \equiv \frac{W(x_1,t_1;x_2,t_2)}{W(x_1,t_1)}. \quad (1.3.2)$$

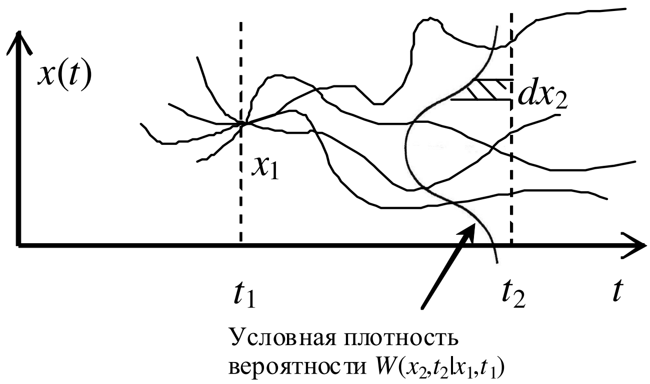

Рис. 6. Физический смысл условной плотности вероятности

Физический смысл: $W(x_2,t_2/x_1,t_1)dx_2$ есть условная вероятность того, что значение случайной величины $x(t_2)$ лежит в интервале $[x_2, x_2+dx_2]$, если в момент времени t_1 случайный процесс имел значение в интервале $[x_1, x_1+dx_1]$ (см. рис. 6). Для непрерывнозначного процесса эта условная вероятность W не зависит от dx_1 при $dx_1\to 0$:

$$\begin{aligned} &W(x_2,t_2/x_1,t_1)dx_2=P\{x_2 \le x(t_2)<x_2+dx_2/x_1 \le x(t_1)<x_1+dx_1\}= \\ &=P\{x_2 < x(t_2)<x_2+dx_2/x(t_1)=x_1\} \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Фактически, исходя из определения, условная плотность вероятности – это плотность вероятности для статистического подансамбля случайного процесса $x(t)$, в котором выбраны только реализации, проходящие вблизи точки $x_1=x(t_1)$. Поэтому по отношению к переменной x_2 условная плотность вероятности обладает всеми свойствами обычной плотности вероятности:

1. Неотрицательность: $W(x_2,t_2/x_1,t_1)\ge 0$;
2. Нормировка: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x_2,t_2/x_1,t_1)\, dx_2 = 1$;

Однако эта функция не обладает свойством симметричности: $W(x_1,t_1/x_2,t_2)\neq W(x_2,t_2/x_1,t_1)$; зная условную плотность вероятности, можно ввести условное среднее по формуле:

$$< x(t_2)/[x(t_1) = x_1] >= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2 W(x_2,t_2/x_1,t_1)dx_2 \tag{1.3.4}$$

Аналогично (1.1.3), (1.1.4), также можно вводить условные средние от любых функций от $x(t)$. Рассмотрим реальный физический процесс, непрерывный во времени. Как зависит условная плотность вероятности от разности времен $\tau=t_2-t_1$?

Для обычных случайных процессов (физически реальных процессов в системах с конечной “памятью») процесс в момент времени $t=t_2$ «забывает» свое начальное значение при $t=t_1$, если $\tau\to\infty$. Математически это свойство можно записать виде

$$\lim_{\tau\to\infty} W(x_2,t_2/x_1,t_1) = W(x_2,t_2)\,. \tag{1.3.5}$$

Для $\tau=t_2-t_1\to 0$ в силу непрерывности реализации имеем, очевидно, что

$$\lim_{\tau\to 0} W(x_2,t_2/x_1,t_1) = \delta(x_2-x_1)\,. \tag{1.3.6}$$

Таким образом, реальный физический процесс - это процесс с затухающим вероятностным последействием. Данное свойство поясняется на рис. 7. Видно, что с увеличением разности τ времен функция плотности вероятности расширяется и, следовательно, случайный процесс может принимать различные значения, независимо от того, какое значение он принимал в начальный момент времени $t_2=t_1$.

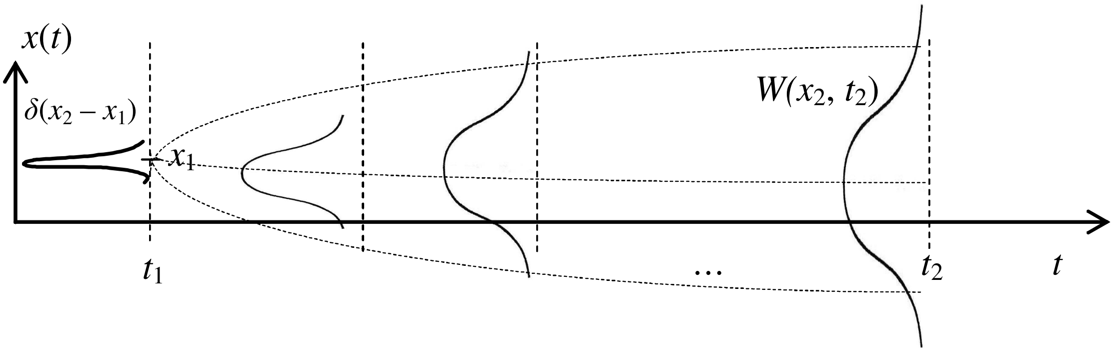

Рис. 7. Качественное поведение условной плотности вероятности

в зависимости от времени наблюдения

Используя свойство согласованности, введем n-мерную условную плотность вероятности, используя свойство согласованности:

$$W(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n) = W(x_1,t_1;\ldots;x_{n-1},t_{n-1})\ W\left(x_n,t_n / x_1,t_1;\ldots;x_{n-1},t_{n-1}\right). \quad (1.3.7)$$

Отсюда видно, что n-мерная плотность вероятности имеет смысл одномерной плотности вероятности x_n при $t=t_n$ при условии, что случайный процесс прошел через n-1 точек $x_1, x_2, \ldots$ x_{n-1} в моменты t_1, t_2, …, t_{n-1} соответственно (см. рис. 8).

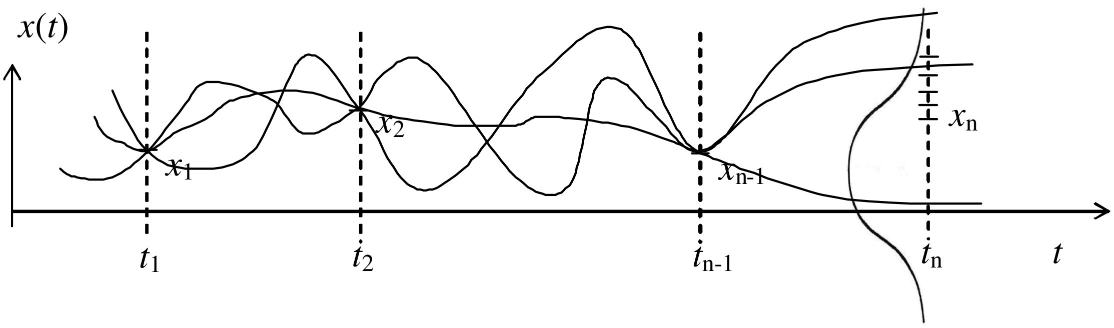

Рис. 8. Представление n-мерной условной плотности вероятностей

Последовательно применяя формулу (1.3.7), можно получить представление n-мерной плотности вероятности через условные плотности вероятности:

$$W(x_1,t_1,\ldots,x_n,t_n) = W(x_1,t_1)\cdot W\left(x_2,t_2/x_1,t_1\right)\cdot W\left(x_3,t_3/x_1,t_1,x_2,t_2\right)\cdot\ldots \\ \cdot W\left(x_n,t_n/x_1,t_1,\ldots,x_{n-1},t_{n-1}\right) \quad (1.3.8)$$

Пример применения этой формулы при n=3:

$$W(x_1,t_1;x_2,t_2;x_3,t_3) = W(x_1,t_1)W\left(x_2,t_2/x_1,t_1\right)W\left(x_3,t_3/x_1,t_1;x_2,t_2\right) \quad (1.3.9)$$

2. Некоторые модели случайных процессов

Многие физические процессы оказываются не столь сложными, чтобы использовать n-мерную плотность вероятности $W(x_1, t_1, ..., x_n, t_n)$. Поэтому в радиофизике широко используются математические модели реальных случайных процессов, для описания которых достаточно одно- или двумерных плотностей вероятностей.

2.1. Совершенно случайные процессы

Определение 1. Совершенно случайный процесс – это такой случайный процесс, значения которого в любые несовпадающие моменты времени $t_1,\ldots,t_n$ статистически независимы.

Вспомним определение статистической независимости двух случайных величин x и y [3]. Они называются статистически независимыми, если двумерная плотность вероятности распадается на произведение двух одномерных, то есть $W_{xy}(x, y) = W_x(x)W_y(y)$.

Поэтому n-мерную плотность вероятности совершенно случайного процесса можно представить в виде произведения одномерных плотностей вероятности в виде:

$$W(x_1, t_1, ..., x_n, t_n) = W(x_1, t_1) \cdot ... \cdot W(x_n, t_n) = \prod_{i=1}^{n} W(x_i, t_i). \qquad (2.1.1)$$

К такой модели случайного процесса относится широко распространенный в радиофизике «белый шум». Реализацию его с точки зрения математики изобразить нельзя, так как она разрывна в каждой точке. Однако физики обычно ее изображают очень легко. Физически применение модели совершенно случайного процесса оправдано при рассмотрении случайных процессов, характерное время изменения которых очень мало (много меньше инерционности экспериментальной установки) [1]. Можно сказать, что это процесс «без всякой памяти». На рис. 9 показана отдельная реализация «белого шума».

Совершенно случайный процесс *полностью* описывается одномерной плотностью вероятности $W(x,t)$, а n-мерная условная плотность вероятности равна $W(x_n, t_n / x_1, t_1, ..., x_{n-1}, t_{n-1}) = W(x_n, t_n)$.

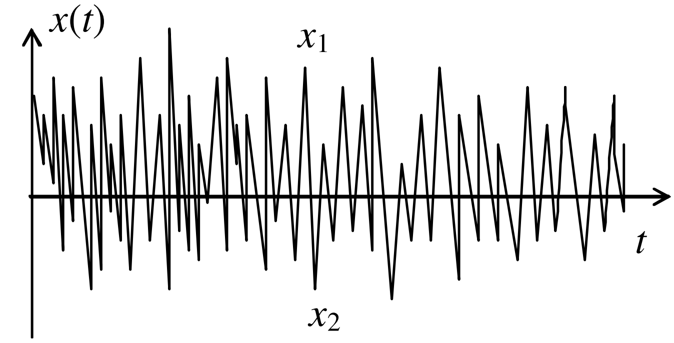

Рис. 9. Совершенно случайный процесс

2.2. Марковские случайные процессы.

Случайный процесс $x(t)$ является марковским, если для любых упорядоченных моментов времени $t_1 < t_2 < ... < t_n$ условная n-мерная плотность вероятности зависит только от последнего фиксированного значения

$$W\left(x_n, t_n / x_1, t_1, ..., x_{n-1}, t_{n-1}\right) = W\left(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}\right) \tag{2.2.1}$$

Марковский случайный процесс называют еще случайным процессом без последействия. Эти слова имеют следующий смысл: если точно известно состояние марковского процесса в настоящий момент времени, то его будущее состояние не зависит от всех прошлых моментов времени. Используя формулу (1.3.8) (представление n-мерной плотности вероятности через условные плотности вероятности) для марковского процесса получим:

$$\begin{gathered} W(x_1, t_1, ..., x_n, t_n) = W(x_1, t_1) \cdot W(x_2, t_2 / x_1, t_1) \cdot W(x_3, t_3 / x_2, t_2) \cdot \\ \cdot ... \cdot W(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}) = W(x_1, t_1) \prod_{i=2}^{n} W(x_i, t_i / x_{i-1}, t_{i-1}) \end{gathered} \tag{2.2.2}$$

Это означает, что для полного описания марковского процесса достаточно знать одномерное распределение и условную плотность вероятности второго порядка (что эквивалентно двумерной плотности вероятности). Условные плотности вероятности для марковских процессов часто называются вероятностями перехода (см. рис. 10), поскольку они имеют смысл вероятности перехода с одного уровня x_0 на другой уровень x_1.

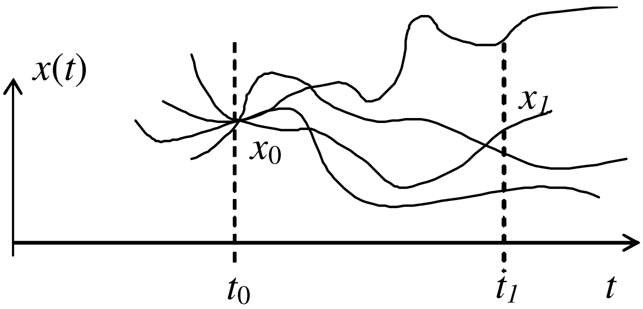

Рис. 10. Иллюстрация для условных плотностей вероятности марковских процессов

Теория марковских процессов – мощный математический аппарат статистической радиофизики, с помощью которого решаются задачи анализа нелинейных преобразований случайных процессов, синтеза оптимальных систем обработки сигналов и другие. Более подробно с этой теорией можно ознакомиться в [6].

Уравнение Смолуховского. Условная плотность вероятности для марковского процесса удовлетворяет уравнению Смолуховского, которое выражает тот факт, что вероятности перехода для каких-то трех последовательных моментов времени должны быть определенным образом согласованы между собой. Это уравнение можно вывести, используя определение марковского процесса и рассматривая три момента времени $t_0<t_1<t$ (см. рис. 11).

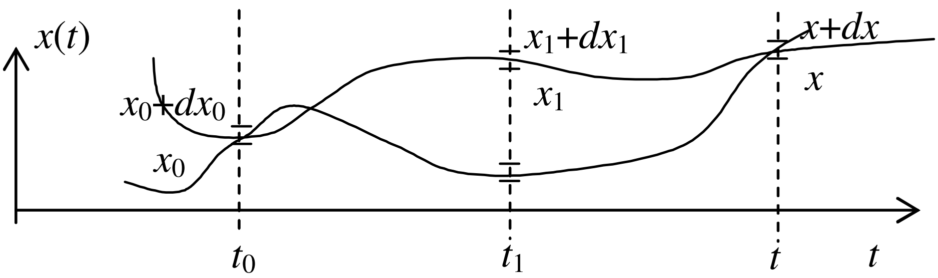

Рис. 11. Представление марковского процесса в три момента времени

Вероятность перехода с уровня x_0 при t_0 на уровень x при t по определению равна $W(x,t/x_0,t_0)dx$. Но этот переход реализуется через какое-либо состояние x_1 в промежуточный момент времени t_1 ($t_0<t_1<t$), то есть может быть представлен в виде двух последова-

тельных переходов $x_0 \to x_1$ и $x_1 \to x$. Вероятность совместного осуществления этих двух переходов равна произведению $W(x_1,t_1 / x_0,t_0)dx_1 \cdot W(x,t / x_1,t_1)dx$ (в силу условия марковости процесс без последействия). Это есть вероятность одного из взаимно исключающих друг друга частных случаев перехода $x_0 \to x$, и поэтому суммирование по всем возможным состояниям x_1 в момент времени t_1 должно давать полную вероятность перехода $x_0 \to x$:

$$W(x,t / x_0,t_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(x,t / x_1,t_1) W(x_1,t_1 / x_0,t_0) dx_1 . \qquad (2.2.3)$$

Следует обратить внимание на существенное ограничение, которое налагается уравнением Смолуховского на допустимый вид условных плотностей вероятности W: интегрирование по x_1 произведения двух условных плотностей вероятности должно снова давать условную плотность вероятности W и должно автоматически исключать зависимость результата от промежуточного момента времени t_1, от которого зависит подынтегральная функция в (2.2.3) [1].

Уравнение Смолуховского (2.2.3) справедливо для любого марковского процесса.

2.3. Квазидетерминированные случайные процессы

Для начала рассмотрим, что собой представляет обычный детерминированный процесс с точки зрения вводимого нами аппарата случайных процессов? Каков «статистический ансамбль» детерминированного процесса?

Пусть $x(t)=s(t)$ - детерминированная функция. В качестве примера рассмотрим детерминированный процесс $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где амплитуда A_0, начальная фаза φ_0 и частота ω_0 являются постоянными величинами. Ансамбль детерминированного процесса состоит из одной и той же реализации (см. рис. 12). Поэтому вероятность попасть в момент времени t_1 в точку $s(t_1)$ будет равна единице. Следовательно, одномерная плотность вероятности будет равна $W(x_1,t_1) = \delta[x_1 - s(t_1)]$, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака (см. Приложение). Рассуждая аналогично, для многомерной плотности вероятности получим, что

$$W(x_1,t_1,...,x_n,t_n) = \prod_{i=1}^{n} \delta[x_i - s(t_i)]. \qquad (2.3.1)$$

С точки зрения статистического описания значения детерминированного процесса статистически независимы. Графически плотность вероятности (2.3.1) изображена на рис. 13. Описывать детерминированные процессы с помощью аппарата случайных процессов не имеет большого смысла. Однако это помогает ввести интересный класс квазидетерминированных случайных процессов.

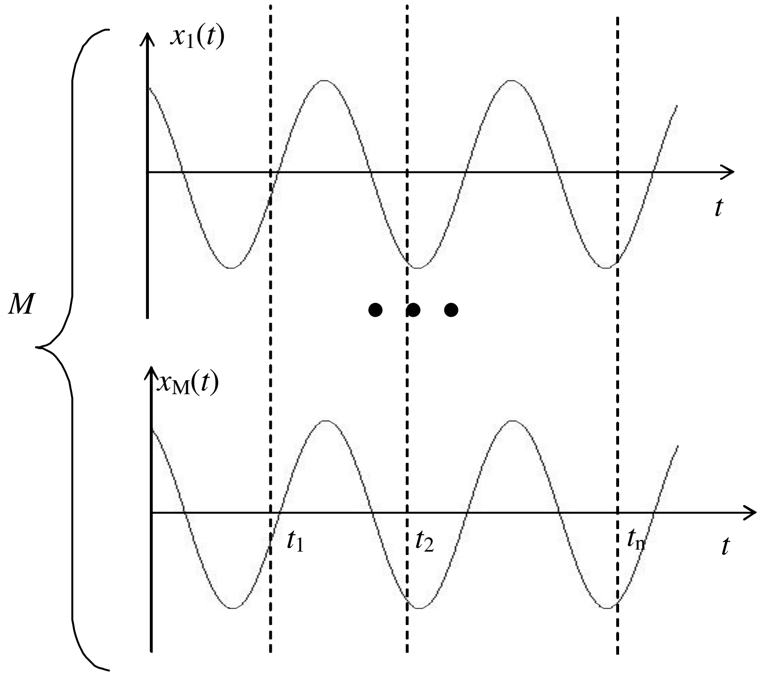

Рис. 12. Реализации детерминированного процесса

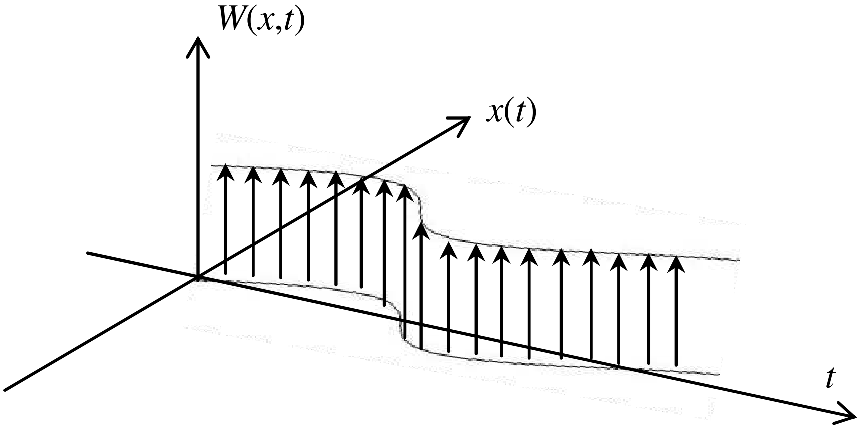

Рис. 13. Плотность вероятности детерминированного процесса

Определение: Квазидетерминированным называется процесс, реализации которого описываются функцией времени заданного вида, но содержащей в себе один или несколько случайных параметров (величин).

Зададим такой процесс в виде $x(t) = s(t, \lambda)$, где λ- случайная величина, распределение которой $W_\lambda(\lambda)$ известно. В общем случае p случайных параметров можно записать $x(t) = s(t, \lambda_1, \ldots \lambda_p)$.

Приведем два примера квазидетерминированного случайного процесса.

Пример 1: Процесс со случайной амплитудой: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где A - случайная величина, плотность вероятности которой описывается релеевским распределением вида

$$W_A = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_A{}^2}\right). \tag{2.3.2}$$

Такое распределение амплитуды характерно для систем беспроводной связи, работающих в условиях многолучевого пространственного канала, когда на приемную антенну приходит множество сигналов, переотраженных от разных рассеивателей. В результате интерференции этих сигналов возникают замирания и амплитуда принятого сигнала может подчиняться релеевскому распределению.

Пример 2: Часто в радиофизике рассматривается квазидетерминированный случайный процесс со случайной фазой φ, равномерно распределенной в интервале $[0, \pi]$, то есть

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad W_\varphi(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & |\varphi| \le \pi \\ 0, & |\varphi| > \pi \end{cases} \tag{2.3.3}$$

В указанных примерах речь шла об одномерных плотностях вероятности. Теперь зададимся вопросом, а какой вид имеет n-мерная плотность вероятности квазидетерминированного случайного процесса? Заметим, что если параметр λ принял какое-то значение, то функция $s(t, \lambda)$ становится неслучайной! Отсюда, по аналогии с формулой (2.3.1) для детерминированного процесса можно записать условную плотность вероятности в виде

$$W(x_1, t_1, \ldots, x_n, t_n / \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \delta[x_i - s(t_i, \lambda)] \tag{2.3.4}$$

Совместная плотность вероятности случайных величин x_1, … x_n, λ равна

$$W(x_1, t_1; ...; x_n, t_n; \lambda) = W_\lambda(\lambda) W(x_1, t_1, ..., x_n, t_n / \lambda) \tag{2.3.5}$$

Объединяя эти два выражения, и проводя интегрирование по «лишней» переменной λ, получим

$$W(x_1, t_1; ...; x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\lambda(\lambda) \prod_{i=1}^{n} \delta[x_i - s(t_i, \lambda)] d\lambda \tag{2.3.6}$$

Вернёмся к примеру 2 и найдем плотность вероятности квазидетерминированного случайного процесса (2.3.3). Рассмотрим ансамбль синусоидальных колебаний, имеющих одинаковую амплитуду A_0 и частоту ω_0, но случайные начальные фазы (см. рис.14).

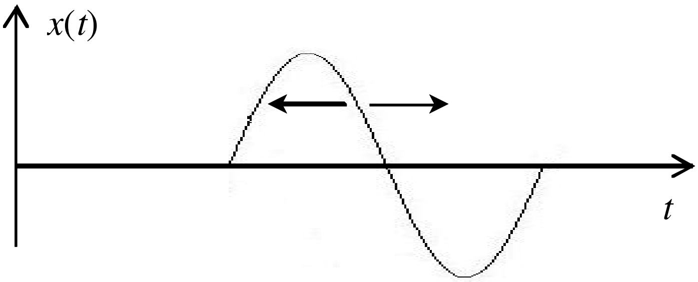

Рис. 14. Реализации случайного сигнала

Предполагая известной плотность вероятности $W_\varphi(\varphi)$ для φ (см. рис. 15), нужно найти плотность вероятности $W(x)$ для x. Иначе говоря, нужно найти плотность вероятности для значений x в некоторый фиксированный момент времени t, если известна плотность вероятности для начальных фаз φ. Ясно, что начальные фазы могут принимать значения только в интервале $(-\pi, \pi)$.

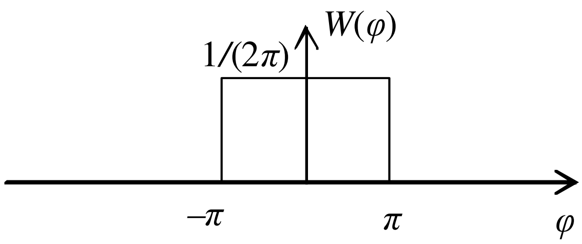

Рис. 15. Плотность вероятности $W_\varphi(\varphi)$

Заметим, что каждому выбранному x из интервала $(-A, A)$ соответствует два значения φ в интервале $(-\pi, \pi)$(см. рис. 16).

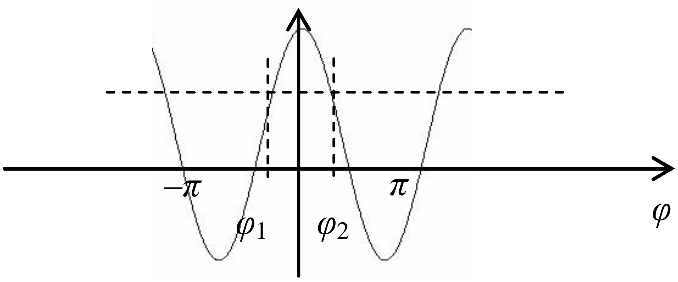

Рис. 16. Гармоническое колебание

Тогда можем записать, учитывая «выкалывающие свойства δ-функции (см. Приложение), что

$$W_x(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_\varphi(\varphi)\delta[x - \underbrace{A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)}_{s(t,\varphi)}]d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \delta[\underbrace{x - A_0\cos(\omega_0 t+\varphi)}_{\alpha(\varphi)}]d\varphi = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\left|\alpha'_\varphi(\varphi)\right|_{\varphi=\varphi_1}} + \frac{1}{\left|\alpha'_\varphi(\varphi)\right|_{\varphi=\varphi_2}}\right] \qquad (2.3.7)$$

Так как

$$\left|\alpha'_\varphi(\varphi)\right| = \left|A_0\sin(\omega_0 t+\varphi)\right|_{\varphi=\varphi_1,\varphi_2} = A_0\sqrt{1-\left(\frac{x}{A_0}\right)^2} = \sqrt{A_0^2 - x^2}\,, \qquad (2.3.8)$$

то окончательно имеем

$$W(x,t) = W(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A_0^2 - x^2}} & |x| < A_0 \\ 0 & |x| > A_0 \end{cases} \qquad (2.3.9)$$

Отсюда видно, что плотность вероятности такого «статистического ансамбля» (случайного процесса) не зависит от времени и не зависит от такого важного для радиофизики параметра, как частота ω_0. Хотя очевидно, что процессы с разными ω_0 вообще говоря являются разными, то есть это разные ансамбли. Это показывает, что разные случайные процессы могут иметь одинаковые одномерные плотности вероятности.

3. Характеристическая функция, моментные и кумулянтные функции случайного процесса

3.1. Характеристическая функция

Выше уже отмечалось, что случайный процесс считается заданным, если известны его n-мерные плотности вероятности для любого n. В теории случайных процессов (как и в теории вероятностей) [1,2] вместо плотностей вероятности для описания случайного процесса используют также характеристические функции.

<u>Определение:</u> n – мерной характеристической функций случайного процесса $x(t)$ будем называть n-кратное Фурье преобразование от его n-мерной плотности вероятности, то есть

$$\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n)=\int\int W(x_1,t_1;...;x_n,t_n)\cdot e^{j(u_1x_1+...+u_nx_n)}dx_1...dx_n \quad (3.1.1)$$

<u>Замечание.</u> Для сокращения записи математических выражений в некоторых случаях вместо определенных интегралов в бесконечных пределах будем писать неопределенные интегралы.

Отсюда следует, что характеристическая функция равна

$$\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n)=< e^{j(u_1x_1+...+u_nx_n)} >=< \exp\left[j\sum_{i=1}^{n}u_ix(t_i)\right]> \quad (3.1.2)$$

Характеристическая функция является функцией n переменных u_1, u_2,…, u_n и зависит от n параметров t_1,t_1,…,t_n.

Очевидно, что зная характеристическую функцию (n-мерную), можно найти и n-мерную плотность вероятности, с помощью обратного Фурье-преобразования:

$$W(x_1,t_1;...;x_n,t_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\int\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n)e^{-j(u_1,x_1+...+u_n,x_n)}du_1...du_n \quad .(3.1.3)$$

Использование характеристической функции играет большую роль как в доказательствах многих важных теорем теории вероятностей, так и при решении конкретных задач. Характеристическая функция *однозначно* связана с функцией плотности вероятности, однако она имеет одно существенное преимущество. При сложении независимых случайных величин, когда плотность вероятности находится с помощью свертки, характеристическая функция суммы получается простым перемножением характеристических функций отдельных слагаемых.

Основные свойства характеристической функции.

1. Нормировка.

Из условия нормировки n-мерной плотности вероятности следует, что

$$\Theta_x(0,t_1;...;0,t_n) = \int...\int W(x_1,t_1;...;x_n,t_n)dx_1...dx_n = 1; \qquad (3.1.4)$$

2. Ограниченность по модулю

$$\left|\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n)\right| \le \Theta_x(0,t_1;...;0,t_n) = 1; \qquad (3.1.5)$$

3. Симметрия

$$\Theta_x(-u_1,t_1;...;-u_n,t_n) = \Theta_x^*(u_1,t_1;...;u_n,t_n); \qquad (3.1.6)$$

4. Согласованность

$$\Theta_x(u_1,t_1;...;u_m,t_m) = \Theta_x(u_1,t_1;...;u_m,t_m;0,t_{m+1};...;0,t_n); \qquad (3.1.7)$$

5. Для случайного процесса с независимыми значениями (совершенно случайного процесса) n-мерная характеристическая функция «распадается» на произведение одномерных:

$$\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n) = \prod_{i=1}^{n}\Theta_x(u_i,t_i) \qquad (3.1.8)$$

6. Для марковских случайных процессов нужно знать двумерную характеристическую функцию.

3.2. Моментные и кумулянтные функции случайного процесса

Описание n-мерных плотностей вероятности или характеристических функций сложно и, самое главное, требуется не во всех практических задачах. Поэтому в качестве характеристик случайных процессов, более простых, чем плотности вероятности и характеристические функции, широко используются моментные и кумулянтные функции. Наиболее распространенными (известными даже не специалистам) статистическими характеристиками являются:

- среднее значение случайного процесса (среднее статистическое)

$$\alpha_1(t) = m_x(t) = < x(t) > = \int_{-\infty}^{+\infty} xW(x,t)dx, \tag{3.2.1}$$

которое является моментной функцией первого порядка;

- корреляционная функция

$$\alpha_2(t_1,t_2) \equiv K_x[t_1,t_2] = < x(t_1)x(t_2) > \equiv \int\int x_1x_2W(x_1,t_1;x_2t_2)dx_1dx_2\ , \tag{3.2.2}$$

которая представляет собой моментную функцию второго порядка.

Эти характеристики представляют собой частный вид моментной функции s-го порядка случайного процесса, равной

$$\begin{aligned} &\alpha_s(t_1,t_2,...,t_s) = < x(t_1)x(t_2)\cdot ...\cdot x(t_s) > \equiv \\ &\equiv \underbrace{\int ... \int}_{s} x_1\cdot ...\cdot x_sW(x_1,t_1;...;x_st_s)dx_1...dx_s \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

В формуле (3.2.3) произвольно выбираемые моменты времени $t_1, t_2, ..., t_s$ могут быть различными, а также совпадать между собой как частично (n различных значений t_i, $n \le s$), так и полностью $(t_1 = t_2 = ... = t_s)$. Поэтому иногда используют запись моментных функций с явным указанием количества совпадений, оставляя только несовпадающие моменты.

$$\alpha_s(t_1,t_2,...,t_n) = < x^{\nu_1}(t_1)x^{\nu_2}(t_2)\cdot ...\cdot x^{\nu_n}(t_n) > . \tag{3.2.4}$$

где $s = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n \ge n$.

Очевидно, что для вычисления любой моментной функции порядка s достаточно знать n-мерную плотность вероятности, где n – по-прежнему число различных значений t_i ($1 \le n \le s$):

$$\begin{aligned} &\alpha_s(t_1,...,t_n) = < x^{\nu_1}(t_1)\cdot ...\cdot x^{\nu_n}(t_n) > = < \underbrace{x(t_1)\dots x(t_1)}_{\nu_1}\cdot ...\cdot \underbrace{x(t_n)\dots x(t_n)}_{\nu_n} > = \\ &= \underbrace{\int ... \int}_{n} x^{\nu_1}\cdot ...\cdot x^{\nu_n}W(x_1,t_1;...;x_nt_n)dx_1...dx_n \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Например, если совпадают все моменты времени моментной функции, то получим одномерный момент s-го порядка

$$\alpha_s(\underbrace{t,t,...,t}_{s}) \equiv \langle x^s(t) \rangle \equiv \int x^s W(x,t)dx \tag{3.2.6}$$

и для его вычисления достаточно знать одномерную плотность вероятности.

Смешанный момент того же порядка s, содержащий два момента времени t_1 и t_2, равен

$$\alpha_s(t_1,t_2) = \langle x^{\nu_1}(t_1) \cdot x^{\nu_2}(t_2) \rangle = \int\int x^{\nu_1} x^{\nu_2} W(x_1,t_1;x_2t_2)dx_1dx_2 \tag{3.2.7}$$

и находится с помощью двумерной плотности вероятности.

Связь моментных функций с характеристической функцией.

Запишем разложение n-мерной характеристической функции в ряд Тейлора около нулевой точки $u_1,u_2,\dots,u_n=0$:

$$\begin{aligned}\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n)}{\partial u_k}\right|_{u_1,...,u_n=0} \cdot u_k + \\ &+ \frac{1}{2!}\sum_{k_1,k_2=1}^{n} \left.\frac{\partial^2\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n)}{\partial u_{k_1}\partial u_{k_2}}\right|_{u_1,...,u_n=0} \cdot u_{k_1}u_{k_2} + \\ &+ \cdots + \frac{1}{s!}\sum_{k_1,...,k_s=1}^{n} \left.\frac{\partial^s\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n)}{\partial u_{k_1}\partial u_{k_2}...\partial u_{k_s}}\right|_{u_1,...,u_n=0} \cdot u_{k_1}u_{k_2} \cdot ... \cdot u_{k_s} + ...\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Если обратиться к определению (3.1.1) характеристической функции и к ее свойствам, то, дифференцируя формулу (3.2.8) по $u_{k_1}, u_{k_2}, ..., u_{k_s}$ несложно получить, что

$$\left.\frac{\partial^s\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n)}{\partial u_{k_1}\partial u_{k_2}...\partial u_{k_s}}\right|_{u_1,...,u_n=0} = j^s \cdot \langle x(t_{k_1}) \cdot ... \cdot x(t_{k_s}) \rangle = j^s \alpha_s(t_{k_1}...t_{k_s}) \tag{3.2.9}$$

Для первой производной имеем

$$\left.\frac{\partial\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n)}{\partial u_{k_1}}\right|_{u_1,...,u_n=0} = j < x(t_{k_1}) >= j\alpha_1(t_{k_1}) \qquad (3.2.10)$$

Подставляя выражение для производной характеристической функции в (3.2.8), получаем искомую связь характеристической и моментной функций:

$$\Theta_x(u_1,t_1;...;u_n,t_n) = 1 + j\cdot\sum_{k=1}^{n}\alpha_1(t_k)\cdot u_k +$$
$$+\frac{j^2}{2!}\sum_{k_1,k_2=1}^{n}\alpha_2(t_{k_1},t_{k_2})\cdot u_{k_1}u_{k_2} + ... + \frac{j^s}{s!}\sum_{k_1,\cdots k_s=1}^{n}\alpha_s(t_{k_1},\cdots t_{k_s})\cdot u_{k_1},\ldots,u_{k_2} + \qquad (3.2.11)$$
$$+\ldots = 1 + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{j^s}{s!}\sum_{k_1...k_s}^{n}\alpha_s(t_{k_1},\cdots t_{k_s})\cdot u_{k_1},\ldots,u_{k_2}$$

где $\alpha_s(t_{k_1},\cdots t_{k_s}) \equiv < x(t_{k1}),...,x(t_{k_s}) >$ - всевозможные моментные функции s-го порядка размерности не более n.

Таким образом, задание n-мерной характеристической функции эквивалентно заданию всех n-мерных моментных функций любого порядка s=1,2,…,∞ при условии, что эти моментные функции существуют и ряд (3.2.11) сходится.

Одномоментная характеристическая и моментная функции связаны между собой следующим образом:

$$\Theta_x(u,t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)}{k!}\cdot(ju)^k \qquad (3.2.12)$$

$$\alpha_k(t) = \frac{1}{j^k}\left.\frac{d^k\Theta_x(u,t)}{du^k}\right|_{u=0} \qquad (3.2.13)$$

Кумулянтные функции случайного процесса.

Для задач анализа случайных процессов иногда бывает удобнее записывать разложение в ряд Маклорена не самой характеристической функции, а ее логарифма:

$$\ln\Theta_x(u_1,t_1;\ldots;u_n,t_n)=\ln\Theta_x(0,t_1;\ldots;0,t_n)+j\cdot\sum_{k=1}^{n}\text{κ}_1(t_k)\cdot u_k+$$
$$+\frac{j^2}{2!}\sum_{k_1,k_2=1}^{n}\text{κ}_1(t_k)\cdot u_{k_1}u_{k_2}+\ldots \tag{3.2.14}$$

Учитывая свойство нормировки характеристической функции $\left(\Theta_x(0,t_1;\ldots;0,t_n)=1\right)$, имеем, что

$$\ln\Theta_x(u_1,t_1;\ldots;u_n,t_n)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{j^s}{s!}\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_s=1}^{n}\text{κ}_s(t_{k_1},\ldots,t_{k_s})\cdot u_{k_1}\cdot u_{k_2}\cdot\ldots\cdot u_{k_s}\,. \tag{3.2.15}$$

Правая часть этого выражения представляет собой многочлен относительно $ju_{k_1}, ju_{k_2},\ldots, ju_{k_s}$, а коэффициенты разложения называются кумулянтными функциями.

Коэффициенты разложения логарифма характеристической функции (кумулянтные функции) вычисляются совершенно аналогично формуле (3.2.8), но с заменой $\Theta_x(.)$ на $\ln\Theta_x(.)$ и, поэтому, равны

$$\kappa_s(t_{k_1},\ldots,t_{k_s})\equiv\frac{1}{j^s}\left.\frac{\partial^s\ln\Theta_x(u_1,t_1;\ldots;u_n,t_n)}{\partial u_{k_1}\partial u_{k_2}\cdots\partial u_{k_s}}\right|_{u_1,\ldots,u_n=0} \tag{3.2.16}$$

Из (3.2.15) можно получить выражение для характеристической функции:

$$\Theta_x(u_1,t_1;\ldots;u_n,t_n)=\exp\left\{j\sum_{k=1}^{n}\kappa_1(t_k)u_k+\frac{j^2}{2!}\sum_{k_1,k_2=1}^{n}\kappa_2(t_{k_1},t_{k_2})u_{k_1}u_{k_2}+\ldots\right\} \tag{3.2.17}$$

Задание всех кумулянтных функций заданной размерности (как и задание моментных функций) полностью описывает случайный процесс, поскольку эквивалентно заданию характеристической функции или плотности вероятностей заданной размерности. Этот факт поясняется следующей диаграммой, на которой F и F^{-1} – обозначения прямого и обратного Фурье преобразований, соответственно.

$$
\begin{tikzcd}
 & W(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n) \arrow[r, leftrightarrow, "F^{-1},F"'] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, leftarrow, shift right] & \Theta_x(u_1,t_1,\ldots,u_n,t_n) \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, leftarrow, shift right] & \\
\alpha_s(t_1,\ldots,t_s) \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, leftarrow, shift right] & & & \kappa_s(t_1,\ldots,t_s)
\end{tikzcd}
$$

Моментные функции Кумулянтные функции

Между кумулянтными и моментными функциями существует однозначная взаимосвязь, но она достаточно громоздка [7]. Мы найдем выражение только для первых двух кумулянтных функций через моментные функции из их определения (3.2.16).

Кумулянтная функция первого порядка (s=1) равна

$$
\begin{aligned}
\kappa_1(t_k) &= \frac{1}{j}\left\{\frac{\partial \ln \Theta_x(u_1t_1;\ldots;u_nt_n)}{\partial u_k}\right\}\Bigg|_{u_1,\ldots,u_n=0} = \\
&= \frac{1}{j}\cdot\left\{\underbrace{\frac{1}{\Theta_x(u_1t_1;\ldots;u_nt_n)}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{\partial\Theta_x(u_1t_1;\ldots;u_nt_n)}{\partial u_k}}_{j\alpha_1(t_k)}\right\}\Bigg|_{u_1,\ldots,u_n=0}
\end{aligned}
\tag{3.2.18}
$$

Отсюда

$$
\kappa_1(t_k) = \alpha_1(t_k) = m_x(t_k)\,. \tag{3.2.19}
$$

Следовательно, кумулянтная функция первого порядка в некоторый момент времени t_k представляет собой среднее значение случайного процесса в этот момент времени.

Кумулянтная функции второго порядка (s=2) равна

$$
\begin{aligned}
\kappa_2(t_{k_1},t_{k_2}) &\equiv \frac{1}{j^2}\left\{\frac{\partial^2 \ln\Theta_x(u_1t_1;\ldots;u_nt_n)}{\partial u_{k_1}\partial u_{k_2}}\Bigg|_{u_1,\ldots,u_n=0}\right\} = \\
&= \frac{1}{j^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u_{k_1}}\left(\frac{1}{\Theta_x(u_1t_1;\ldots;u_nt_n)}\cdot\frac{\partial\Theta_x(u_1t_1;\ldots;u_nt_n)}{\partial u_{k_2}}\right)\Bigg|_{u_1,\ldots,u_n=0}.
\end{aligned}
\tag{3.2.20}
$$

В результате последовательных преобразований, а, также учитывая свойство нормировки характеристической функции, получим, что

$$\kappa_2(t_{k_1},t_{k_2}) = \frac{1}{j^2}\left(\underbrace{\frac{-1}{\Theta_x^2(u_1t_1;\ldots;u_nt_n)}}_{=1} \underbrace{\frac{\partial\Theta_x(u_1t_1;\ldots;u_nt_n)}{\partial u_{k_1}}}_{j\alpha_1(t_{k_1})} \underbrace{\frac{\partial\Theta_x(u_1t_1;\ldots;u_nt_n)}{\partial u_{k_2}}}_{j\alpha_1(t_{k_2})} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Theta_x(u_1t_1;\ldots;u_nt_n)} \underbrace{\frac{\partial^2\Theta_x(u_1t_1;\ldots;u_nt_n)}{\partial u_{k_1}\partial u_{k_2}}}_{j^2\alpha_2(t_{k_1},t_{k_2})} \right)\Bigg|_{u_1,\ldots,u_n=0} = \tag{3.2.21}$$

$$= \alpha_2(t_{k_1},t_{k_2}) - \alpha_1(t_{k_1})\alpha_2(t_{k_2}) =$$
$$= < x(t_{k_1})x(t_{k_2}) > - < x(t_{k_1}) >< x(t_{k_2}) > = B_x(t_{k_1},t_{k_2})$$

Кумулянтная функция второго порядка называется ковариационной функцией $B_x[t_1,t_2]$ случайного процесса. Она равна корреляционной функции $K_x[t_1,t_2]$ минус произведение средних значений (или корреляционной функции центрированного случайного процесса $\tilde{x}(t) = x(t) - < x(t) >$ с нулевым средним значением):

$$\kappa_2(t_1,t_2) = B_x[t_1,t_2] = < \tilde{x}(t_1)\tilde{x}(t_2) > \tag{3.2.22}$$

или

$$\kappa_2(t_1,t_2) = K_x[t_1,t_2] - < x(t_1) >< x(t_2) > \tag{3.2.23}$$

При совпадающих моментах времени $t_1 = t_2 = t$ корреляционная функция $B_x[t,t] = \sigma_x^2(t) = < x^2(t) > - < x(t) >^2$ является дисперсией случайного процесса.

Как мы видели выше, если значения случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2 статистически независимы, то двумерная плотность вероятности распадается на произведение одномерных плотностей вероятности, то есть $W(x_1,t_1;x_2,t_2) = W(x_1,t_1)W(x_2,t_2)$.

Два значения случайного процесса $x(t_1)$ и $x(t_2)$ называются некоррелированными, если $B_x[t_1,t_2] = 0$ или $K_x[t_1,t_2] = < x(t_1)\, x(t_2) > = < x(t_1) >< x(t_2) >$.

Из статистической независимости следует некоррелированность. В самом деле

$$
\begin{aligned}
&K_x[t_1,t_2] = < x(t_1)\, x(t_2) > = \int\int x_1 x_2 W(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1 dx_2 = \\
&= \int\int x_1 x_2 W(x_1,t_1) W(x_2,t_2)dx_1 dx_2 = \int x_1 W(x_1,t_1)dx_1 \int x_2 W(x_2,t_2)dx_2 = \\
&= < x(t_1) > < x(t_2) >
\end{aligned}
\tag{3.2.24}
$$

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Иногда бывает удобнее рассматривать нормированную ковариационную функцию равную

$$
R_x[t_1,t_2] = \frac{B_x[t_1,t_2]}{\sqrt{B_x[t_1,t_1]\,B_x[t_2,t_2]}} = \frac{B_x[t_1,t_2]}{\sigma_x(t_1)\,\sigma_x(t_2)}, \tag{3.2.25}
$$

которую называют коэффициентом корреляции (автокорреляции) [2]. Более подробно свойства корреляционной функции будут рассмотрены в следующей части, специально посвященной корреляционной теории случайных процессов, или спектрально-корреляционной теории.

4. Гауссовы случайные процессы

Ранее были введены совершенно случайные и марковские процессы с использованием специального упрощения в n-мерных условных плотностях вероятностей, которые физически означали введение конечной или нулевой статистической зависимости случайных процессов. Попробуем провести упрощения в случае, когда характеристическая функция имеет общий вид (3.2.17).

4.1. Характеристическая и кумулянтная функции гауссова случайного процесса

Рассмотрим класс случайных процессов, у которых все кумулянтные функции, кроме первого порядка, равны нулю, то есть $\kappa_s(t_{k_1}, t_{k_2}, ..., t_{k_s}) \equiv 0,\ s \geq 2$. Для этого класса случайных процессов из (3.2.17) будем иметь, что характеристическая функция равна

$$\Theta_x(u_1, t_1; \ldots u_n, t_n) = \exp\left\{ j \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\kappa_1(t_k)}_{m(t_k)} u_k \right\}. \tag{4.1.1}$$

Найдем n-мерную плотность вероятности, вычислив обратное Фурье-преобразование. Получим, что

$$\begin{aligned} &W(x_1, t_1; \ldots, x_n, t_n) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int e^{j[m(t_1)u_1 + \ldots + m(t_n)u_n]} e^{-j[u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n]} du_1 \cdots du_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{i=1}^{n} \int e^{-j[x_i - m(t_i)]u_i} du_i = \prod_{i=1}^{n} \delta[x_i - m(t_i)] \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

В результате мы получили n-мерную плотность вероятности детерминированного процесса (см. формулу (2.3.1)). То есть такое сильное упрощение $(\kappa_s(t_{k_1}, t_{k_2}, ..., t_{k_s}) \equiv 0,\ s \geq 2)$, при котором все кумулянтные функции, кроме первого порядка, равны нулю, исключает всю случайность и приводит к тривиальному результату: $x(t)=s(t)$, где $s(t)$ - детерминированный процесс.

Рассмотрим теперь класс случайных процессов, у которых все кумулянтные функции, начиная с третьего порядка, равны нулю, то есть $\kappa_s(t_{k_1}, t_{k_2}, ..., t_{k_s}) \equiv 0,\ s \geq 3$. В этом случае выражение (3.2.17) для характеристической функции примет вид:

$$\Theta_x(u_1, t_1; \ldots u_n, t_n) = \exp\left\{ j\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\kappa_1(t_{k_1})}_{m(t_k)} u_k + \frac{j^2}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \underbrace{\kappa_2(t_k t_l)}_{B_x(t_k, t_k)} u_k u_l \right\} =$$
$$= \exp\left\{ j\sum_{k=1}^{n} m(t_k) u_k - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} B[t_k, t_l] u_k u_l \right\} \qquad (4.1.3)$$

<u>Определение.</u> Процесс $x(t)$ называется гауссовым, если его n-мерная характеристическая функция имеет вид (4.1.3). Или, что эквивалентно, гауссовым называется случайный процесс, у которого все кумулянтные функции высших порядков, начиная с третьего, равны нулю.

Выражение для характеристической функции гауссова процесса в современной литературе [2] часто записывается в векторно-матричном виде. Введем в рассмотрение n-мерные векторы-столбцы аргументов характеристической функции, средних значений и отсчётов значений случайного процесса (векторы $\vec{u}, \vec{m}_x, \vec{x}$, соответственно):

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{m}_x = \begin{pmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \\ \ldots \\ m(t_n) \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \ldots \\ x(t_n) \end{pmatrix}, \qquad (4.1.4)$$

а также ковариационную матрицу вектора $\vec{x}$:

$$\mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} B_x[t_1, t_1] & B_x[t_1, t_2] & \ldots & B_x[t_1, t_n] \\ B_x[t_2, t_1] & B_x[t_2, t_2] & \ldots & B_x[t_2, t_n] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_x[t_n, t_1] & B_x[t_n, t_2] & \ldots & B_x[t_n, t_n] \end{pmatrix} = < [\vec{x} - \vec{m}_x] \cdot [\vec{x} - \vec{m}_x]^T >, \qquad (4.1.5)$$

где T – знак транспонирования.

Теперь получим векторно-матричное представление характеристической функции гауссова процесса в виде:

$$\Theta_x(\vec{u}) = \exp\left\{ j\vec{m}_x^T \vec{u} - (1/2)\,\vec{u}^T \mathbf{B}_x \vec{u} \right\}. \qquad (4.1.6)$$

Основные свойства ковариационной матрицы произвольного случайного процесса $x(t)$ заключаются в том, что $\mathbf{B}_x$ – неотрицательно определенная, симметричная матрица.

Симметричность матрицы $\mathbf{B}_x$ следует из симметричности ковариационной функции $B_x(t_k,t_l)$ относительно перестановки аргументов. В самом деле

$$\begin{gathered} B_x[t_k,t_l] \equiv < x(t_k)x(t_l) > - < x(t_k) >< x(t_l) > \equiv \\ \equiv < x(t_l)x(t_k) > - < x(t_l) >< x(t_k) > \equiv B_x[t_l,t_k]. \end{gathered} \qquad (4.1.7)$$

Отсюда $\mathbf{B}_x^T = \mathbf{B}_x$.

Неотрицательная определенность матрицы $\mathbf{B}_x$ следует из неотрицательной определенности квадратичной формы

$$\vec{u}^T \mathbf{B}_x \vec{u} \ge 0, \qquad (4.1.8)$$

которая, в свою очередь, следует из очевидных равенств, справедливых для любого детерминированного вектора $\vec{u}$:

$$(<[\vec{x}^T]\,\vec{u}^2>) \ge 0, \quad (<[(\vec{x} \quad \vec{m}_x)^T \vec{u}]^2>) \ge 0. \qquad (4.1.9)$$

Отсюда имеем, что.

$$<[(\vec{x}-\vec{m}_x)^T \vec{u}]^2> = \vec{u}^T [<(\vec{x}-\vec{m}_x)(\vec{x}-\vec{m}_x)^T>]\vec{u} = \vec{u}^T \mathbf{B}_x \vec{u} \ge 0. \qquad (4.1.10)$$

Отметим, что корреляционная матрица $\{\mathbf{K}[\mathrm{t_k},\mathrm{t_l}]\} \equiv \mathbf{K} \equiv < \vec{x}\vec{x}^T >$ обладает теми же свойствами симметричности и неотрицательной определенности.

Для гауссова случайного процесса n-мерную плотность вероятности можно найти по формуле (3.1.3), то есть с помощью обратного преобразования Фурье от характеристической функции (4.1.3). Имеем, что

$$W(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[j\vec{m}_x^T \vec{u} - (1/2)\vec{u}^T \mathbf{B}_x \vec{u}] \exp(-j\vec{x}^T \vec{u}) d\vec{u} = \qquad (4.1.11)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{B}_x|}} \exp[-(1/2)(\vec{x} - \vec{m}_x)^T \mathbf{B}_x^{-1} (\vec{x} - \vec{m}_x)]$$

где $|\mathbf{B}_x|$ – определитель матрицы $\mathbf{B}_x$.

В случае, когда n=1, матрица $\mathbf{B}_x$ вырождается в число $\mathbf{B}_x = \sigma_x^2(t)$, а одномерная плотность вероятности равна

$$W(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(t)}} \exp\left(-\frac{[x - m_x(t)]^2}{2\sigma_x^2(t)} \right). \qquad (4.1.12)$$

Замечание. Ковариационная матрица **B** в общем случае неотрицательно определенная, то есть иногда может оказаться, что определитель матрицы **B** равен нулю ($|\mathbf{B}|=0$) и n-мерную плотность вероятности представить в виде (4.1.11) невозможно. В то же время, n-мерная характеристическая функция в этом сингулярном случае существует и имеет вид (4.1.3), (4.1.6). Поэтому, определение гауссова процесса с помощью характеристической функции является более общим. В самом деле, для гауссова случайного процесса можно записать явное выражение для характеристического функционала в виде (4.1.3) или (4.1.6).

4.2. Основные свойства гауссовых случайных процессов

1. Гауссов случайный процесс исчерпывающим образом описывается с помощью двух функций: среднего значения $< x(t_k) > \equiv m_x(t_k)$ и ковариационной функции $B_x[t_1,t_2] \equiv < x(t_1)x(t_2) > - < x(t_1) >< x(t_2) >$.

2. Для гауссовых случайных процессов некоррелированность значений процесса тождественна независимости. Статистическая независимость является достаточным условием некоррелированности, что отражено на диаграмме.

$$\text{Независимость} \underset{}{\overset{\text{Гауссов случайный процесс}}{\rightleftarrows}} \text{Некоррелированность}$$

Доказательство «вправо» было приведено выше (см. формулу (3.2.24)). Рассмотрим доказательство «влево».

Пусть значения $x(t_1)$, $x(t_2)$,…, $x(t_n)$ гауссова случайного процесса $x(t)$ в несовпадающие моменты времени t_1, t_2, …, t_n являются некоррелированными между собой, то есть

$$\begin{cases} B_x[t_k,t_l]=0, & (k\neq l) \\ B_x[t_k,t_k]=\sigma_x^2(t_k), & (k=l) \end{cases} \tag{4.2.1}$$

В этом случае ковариационная матрица диагональная и обратная матрица легко находится. Имеем, что

$$\mathbf{B}_x=\begin{pmatrix} \sigma_x^2(t_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma_x^2(t_2) & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & \sigma_x^2(t_n) \end{pmatrix}, \mathbf{B}_x^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2(t_1)} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_x^2(t_2)} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & \frac{1}{\sigma_x^2(t_n)} \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

Подставляя выражение для определителя $|\mathbf{B}_x|=\sigma_x^2(t_1)\cdots\sigma_x^2(t_n)$ и обратной матрицы $\mathbf{B}_x^{-1}$ в формулу (4.1.11) для n-мерной плотности вероятности гауссова процесса получим, что

$$\begin{aligned} W(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)&=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\mathbf{B}_x|}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m}_x)^T\mathbf{B}_x(\vec{x}-\vec{m}_x)\right)= \\ &=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\sigma_x^2(t_1)\cdot\sigma_x^2(t_2)\cdot...\cdot\sigma_x^2(t_n)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-m_x(t_i))^2}{\sigma_x^2(t_i)}\right)=\prod_{i=1}^{n}W(x_i,t_i) \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

где $W(x_i,t_i)$ - одномерное гауссово распределение вида (4.1.12).

3. В результате любых линейных преобразований гауссовых случайных процессов получается также гауссов случайный процесс.

Например, если на вход линейной системы (см. рис. 17) с детерминированной импульсной характеристикой $h(t,\tau)$ воздействует гауссов процесс $x(t)$, то на выходе системы будет также гауссов случайный процесс равный

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t,\tau)x(\tau)d\tau. \tag{4.2.4}$$

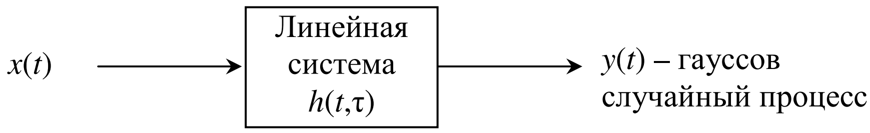

Рис. 17. Линейное преобразование гауссова случайного процесса

Частные случаи линейных преобразований – интегрирование и дифференцирование: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ и $y(t) = \dfrac{dx}{dt}$.

4. Любая линейная комбинация совместно гауссовых процессов есть гауссов процесс: $z(t) = ax(t) + by(t)$ - гауссов случайный процесс. Коэффициенты a и b могут быть любыми детерминированными функциями.

5. Любые условные плотности вероятности гауссова случайного процесса также имеют гауссову форму.

6. С помощью линейных преобразований статистически зависимые (коррелированные) значения гауссова случайного процесса $x(t)$ можно преобразовать к системе статистически независимых (некоррелированных) гауссовых случайных величин.

Пусть $x(t)$ – случайный процесс, выборки которого $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)$ являются коррелированными между собой. Покажем, что имеется линейное преобразование, преобразующее систему случайных величин $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)$ в систему статистически независимых случайных величин $y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_n)$.

Имеем:

$$\vec{y} = \mathbf{A}^T \vec{x} + \vec{b}\,. \tag{4.2.5}$$

Потребуем, чтобы среднее $<\vec{y}>=0$. Тогда, получим, что

$$<\vec{y}>= \mathbf{A}^T <\vec{x}> + \vec{b} = 0\,. \tag{4.2.6}$$

Отсюда

$$\vec{b} = -\mathbf{A}^T m_x\,. \tag{4.2.7}$$

Тогда

$$<\vec{y}>= \mathbf{A}^T (\vec{x} - \vec{m}_x) = 0\,. \tag{4.2.8}$$

Запишем выражение для ковариационной (корреляционной) матрицы $\mathbf{B}_y$ и потребуем, чтобы она была диагональной

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_y &=< \vec{y}\cdot\vec{y}^T >=< \mathbf{A}^T (\vec{x} - \vec{m}_x)\cdot(\vec{x} - \vec{m}_x)^T \mathbf{A} >= \\ &= \mathbf{A}^T < (\vec{x} - \vec{m}_x)\cdot(\vec{x} - \vec{m}_x)^T > \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}_x \mathbf{A} = \Lambda \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

По известной теореме из линейной алгебры [8,9] симметричная матрица всегда может быть приведена к диагональной форме ортогональным преобразованием с помощью матрицы **A**, равной

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{Q}}_{\textit{ортогональная}} = \left\{ \underbrace{\vec{\Psi}_1, \vec{\Psi}_2, ..., \vec{\Psi}_n}_{\substack{\textit{собственные векторы}\\ \textit{матрицы } \mathbf{B}_x}} \right\} \tag{4.2.10}$$

Геометрический смысл этого преобразования: переход к главным осям (см. рис. 18).

Рис. 18. Геометрический смысл преобразования.

7. Любые моментные функции гауссова случайного процесса выражаются через среднее $m_x(t)$ и ковариационную функцию $B_x[t_1,t_2]$.

Запишем выражения для моментных функций для гауссова процесса с нулевым средним значением ($\langle x(t)\rangle=0$). Тогда справедливы следующие соотношения для моментных функций четного порядка:

$$\alpha_2(t_1,t_2)=B_x[t_1,t_2], \tag{4.2.11}$$

$$\begin{aligned}\alpha_4(t_1,t_2,t_3,t_4)&=B_x[t_1,t_2]B_x[t_3,t_4]+B_x[t_1,t_3]B_x[t_2,t_4]+\\&+B_x[t_1,t_4]B_x[t_2,t_3]=3\{B_x[t_1,t_2]B_x[t_3,t_4]\}_s\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Здесь и далее $\{.\}_s$ – скобки симметризации [7]. Скобка симметризации вместе со стоящей перед ней цифрой представляет собой выражение, полностью симметричное относительно всех входящих в неё аргументов. При этом сама цифра указывает, сколько членов содержится в скобке в целом, если её полностью раскрыть. В том случае, когда члены, входящие в скобку симметризации, сами содержат некоторый сомножитель, его выносят вперёд и записывают отдельным множителем перед цифрой, указывающей число слагаемых. В том случае, когда все аргументы, входящие в скобки симметризации, одинаковы, эти скобки можно отбросить. С учётом сказанного, имеем

$$\alpha_6(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)=15\{B_x[t_1,t_2]B_x[t_3,t_4]B_x[t_5,t_6]\}_s. \tag{4.2.13}$$

В общем случае можно записать, что

$$\alpha_{2m}(t_1,t_2,...,t_{2m})=(2m-1)!!\{B_x[t_1,t_2]\cdot B_x[t_3,t_4]\cdot...\cdot B_x[t_{2m-1},t_{2m}]\}_s \tag{4.2.14}$$

где $(2m-1)!!=1\cdot 3\cdot...\cdot(2m-1)$.

Моментные функции нечетного порядка равны нулю, то есть

$$\alpha_{2m+1}(t_1,t_2,...,t_{2m+1})=0. \tag{4.2.15}$$

Выражение (4.2.14) является общим выражением для вычисления моментных функций четного порядка. При подстановке конкретного значения m с его помощью можно найти моментную функцию нужного порядка.

Действительно, для m=1 получаем моментную функцию второго порядка

$$\alpha_2(t_1,t_2)=B_x[t_1,t_2]. \tag{4.2.16}$$

Как можно видеть выражение (4.2.16) совпадает с выражением (4.2.11).

Аналогично, для m=2, имеем

$$\begin{aligned}\alpha_4(t_1,t_2,t_3,t_4)&=B_x[t_1,t_2]\cdot B_x[t_3,t_4]+B_x[t_1,t_3]\cdot B_x[t_2,t_4]+\\&+B_x[t_1,t_4]\cdot B_x[t_2,t_3]=3\{B_x[t_1,t_2]\cdot B_x[t_3,t_4]\}_s.\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Выражение (4.2.17) совпадает с выражением (4.2.12).

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1.

Пусть $x(t)$ – гауссов случайный процесс с нулевым средним ($<x(t)>=0$). Найдем величину $<x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)>$.

Имеем:

$$\begin{aligned}&<x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)>=<x(t_1)x(t_2)><x(t_3)x(t_4)>+\\&+<x(t_1)x(t_3)><x(t_2)x(t_4)>+<x(t_1)x(t_4)><x(t_2)x(t_3)>\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Пример 2.

Что делать, если случайный процесс имеет ненулевое среднее ($<x(t)>\neq 0$)?

Можно записать $x(t)=\xi(t)+<x(t)>$, где $<\xi(t)>=0$. Таким образом, мы перешли к случайному процессу $\xi(t)$ с нулевым средним. Имеем

$$\begin{aligned}&<x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)>=\\&=<[\xi(t_1)+<x(t_1)>][\xi(t_2)+<x(t_2)>][\xi(t_3)+<x(t_3)>][\xi(t_4)+<x(t_4)>]>\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Теперь выполняя умножение и, применяя формулу (4.2.14) для моментов процесса $\xi(t)$ можем найти нужный результат.

Пример 3.

Рассмотрим квадратичный детектор, который обеспечивает нелинейное безинерционное преобразование случайного гауссова случайного процесса (см. рис. 19). Необходимо найти выражение для корреляционной функции на выходе детектора при условии, что $<x(t)>=0$.

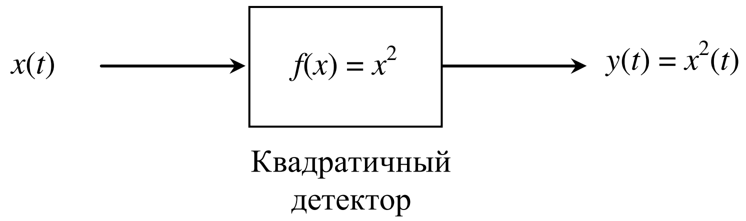

Рис. 19. Нелинейное безынерционное преобразование

Так как $K_y[t_1,t_2] = < x^2(t_1) \cdot x^2(t_2) > = < x(t_1)x(t_1)x(t_2)x(t_2) >$, то для отыскания корреляционной функции необходимо найти моментную функцию с некоторыми совпадающими моментами времени. Имеем, что

$$\begin{aligned} &< x(t_1)x(t_1)x(t_2)x(t_2) >= \\ &=< x^2(t_1) >< x^2(t_2) > + < x(t_1)x(t_2) >< x(t_1)x(t_2) > + \\ &+ < x(t_1)x(t_2) >< x(t_1)x(t_2) >= \sigma_x^2(t_1)\sigma_x^2(t_2) + 2K_x^2[t_1,t_2]. \end{aligned} \qquad (4.2.20)$$

Таким образом, мы получили выражение для корреляционной функции на выходе квадратичного детектора в виде

$$K_y[t_1,t_2] =< y(t_1)y(t_2) >=< x^2(t_1)x^2(t_2) >= \sigma_x^2(t_1)\sigma_x^2(t_2) + 2B_x^2[t_1,t_2]. \qquad (4.2.21)$$

Для одномерного случая моменты 4-го порядка $< x^4(t) >= 3\sigma_x^4(t_1)$.

Выводы. Гауссовы случайные процессы играют очень важную роль в различных приложениях и в частности в статистической радиофизике по двум основным причинам.

Во-первых, гауссова модель случайных процессов обеспечивает приемлемую аппроксимацию случайного поведения очень многих реальных систем. Частичное обоснование столь широкого распространения гауссовых случайных процессов дает центральная предельная теорема [3].

Во-вторых, гауссово распределение обладает рядом свойств, очень удобных для вычислений.

5. Стационарные и эргодические случайные процессы

Ранее были введены некоторые классы случайных процессов: совершенно случайные, марковские, квазидетерминированные, гауссовы. Но можно ввести очень важный класс процессов, исходя из другого принципа классификации. Рассмотрим случайные процессы, однородные во времени или стационарные случайные процессы.

Представление о стационарном случайном процессе может дать, например, наблюдение каких-либо флуктуаций при неизменных макроскопических условиях. Электрический шум в сопротивлении, температура которого постоянна, дробовой эффект при постоянном анодном токе и т.п. – все это стационарные случайные процессы.

5.1. Стационарность в узком смысле (строгая)

Определение. Случайный процесс $x(t)$ называется стационарным в узком смысле, если все его n-мерные плотности вероятности инвариантны относительно сдвига во времени, т.е. при любых n и τ выполняется равенство

$$W(x_1,t_1,\ldots,x_n,t_n) = W(x_1,t_1+\tau,\ldots,x_n,t_n+\tau) \qquad (5.1.1)$$

Из рассмотренных выше определений характеристической функции, условной плотности вероятности, моментных и кумулянтных функций следует, что при выполнении условия (5.1.1) они также будут инвариантны относительно сдвига во времени. Случайные процессы, не удовлетворяющие условию (5.1.1), называются нестационарными в узком смысле.

Из определения (5.1.1) в частности следует:

***n*=1.** Одномерная плотность вероятности $W(x,t)=W(x,t+\tau)$, то есть $W(x,t)=W(x)$. Это означает, что одномерная плотность вероятности стационарного процесса не зависит от времени.

n=2. Двумерная плотность вероятности $W(x_1,t_1;x_2,t_2)=W(x_1,t_1+\tau;x_2,t_2+\tau)$. Величина τ может быть любой. Задав $\tau=-t_1$, получим, что $W(x_1,t_1;x_2,t_2)= W(x_1,0;x_2,t_2-t_1)=W(x_1,x_2,t_2-t_1)$. Следовательно, двумерная плотность вероятности стационарного процесса зависит только от разности времен $\tau=t_2-t_1$.

Отсюда также следует, что среднее значение и дисперсия стационарного случайного процесса не зависят от времени. В самом деле

$$< x(\mathrm{t}) >= \int_{-\infty}^{\infty} xW(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x)dx = m_x = const \tag{5.1.2}$$

$$\sigma_x^2(t) =< [x(t) \quad m_x] >^2 = \int_{\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 W_x(x)dx = \sigma_x^2 = const \tag{5.1.3}$$

Корреляционная и ковариационная функции стационарного случайного процесса зависят только от разности времен, так как

$$\begin{gathered} K_x[t_1,t_2] =< x(t_1)x(t_2) >= \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} x_1 x_2 W(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1 dx_2 = \\ = \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} x_1 x_2 W(x_1,x_2,\underbrace{t_2 - t_1}_{\tau})dx_1 dx_2 = K_x[\tau] \end{gathered} \tag{5.1.4}$$

$$B_x[t_1,t_2] = B_x[\tau] \tag{5.1.5}$$

Нормированная ковариационная функция (коэффициент корреляции)

$$R[t_1,t_2] = \frac{B_x[\tau]}{\sigma_x^2} = R_x[\tau] \tag{5.1.6}$$

Для стационарного случайного процесса корреляционная и ковариационная функции являются четными, то есть $K_x[\tau] = K_x[-\tau]$, $B_x[\tau] = B_x[-\tau]$. Следовательно, коэффициент корреляции также удовлетворяет условию четности: $R_x[\tau] = R_x[-\tau]$ (см.).

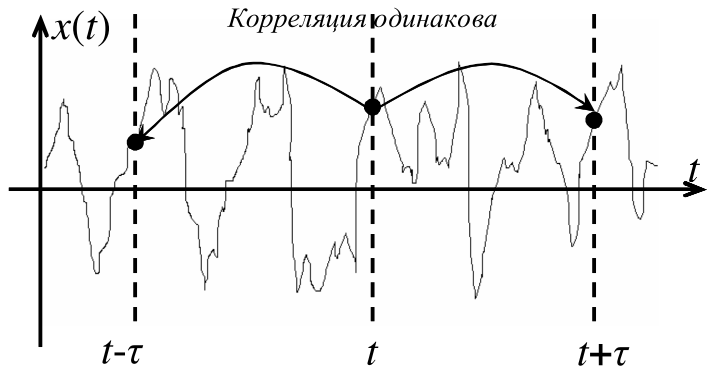

Рис. 20 Чётность корреляционной функции

5.2. Стационарность в широком смысле

При решении многих практических задач (например, при спектрально-корреляционном анализе сигналов), многомерные плотности вероятности вообще не рассматривают, а работают только со средним значением и корреляционной (ковариационной) функцией. В таких задачах инвариантны или нет n-мерные плотности вероятности относительно сдвига безразлично. Поэтому вводят более слабое ограничение - понятие стационарности в широком смысле

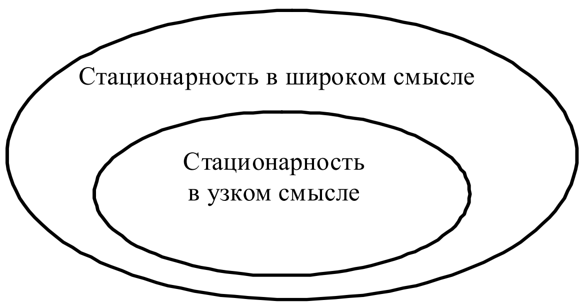

Рис. 21. Иллюстрация соотношения между стационарностью в широком и узком смысле

Определение. Случайный процесс $x(t)$ является стационарным в широком смысле, если среднее значение не зависит от времени $<x(t)>=<x>=m_x=const$, а корреляционная или ковариационная функция зависит только от разности аргументов $K_x[t_1,t_2]=K_x[t_2-t_1]=K_x[\tau]$. Из этих двух условий, очевидно, следуют выражения (5.1.2)-(5.1.6). Об n-мерных плотностях вероятности здесь ничего не говорится и выражение (5.1.1) может и не выполняться. Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но не наоборот.

Для гауссовых процессов понятия стационарности в узком и широком смыслах совпадают, поскольку их n-мерные плотности вероятности полностью определяются средним значением и ковариационной функцией. То есть, имея дело со случайными гауссовыми процессами, можно говорить о стационарности (или нестационарности) вообще, не обговаривая это понятие точнее. Соотношения между случайными процессами, стационарными в широком смысле и узком смысле, можно проиллюстрировать рисунком 21, а между стационарными и гауссовыми – рисунком 22.

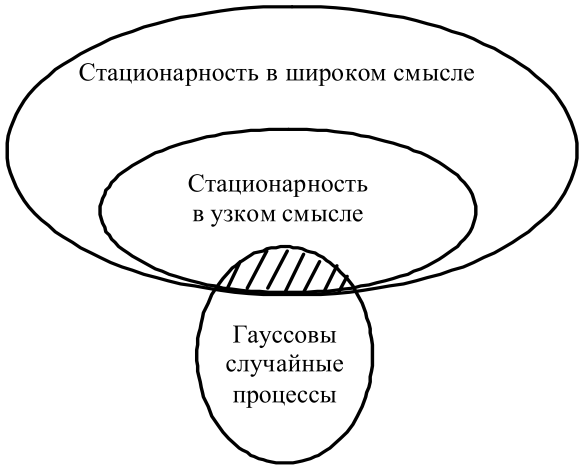

Рис. 22. Иллюстрация соотношения между гауссовыми и стационарными случайными процессами

Для случайных марковских процессов n-мерная плотность вероятности записывается через одномерную $W(x,t)$ и плотность вероятности переходов $W(x_2,t_2/x_1,t_1)$, то есть они стационарны в узком смысле, если $W(x,t)=W(x)$ и $W(x_n,t_n/x_{n-1},t_{n-1})=W(x_n/x_{n-1};t_2-t_1)$. Для таких процессов понятия стационарности в узком и широком смысле являются близкими, но не совпадают. Обычно если вводят стационарный марковский процесс, то в узком смысле.

Совершенно случайный процесс стационарен в узком смысле, если $W(x,t)=W(x)$.

Практически для реальных физических процессов условие стационарности выполняется только на конечном интервале, то есть обычно представляет интерес, стационарен ли процесс на интервале наблюдения или измерения.

Рассмотрим два примера.

Пример 1.

Квазидетерминированный случайный процесс $x(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$, где φ - случайная фаза, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$, то есть φ имеет плотность вероятности вида (2.3.3).

Можно доказать стационарность в широком смысле для этого процесса, если найти среднее значение и корреляционную функцию.

Среднее значение равно

$$\begin{aligned} < x(t) >&= A_0 < \cos(\omega_0 t + \varphi) >= A_0 < \cos\omega_0 t\cos\varphi - \sin\omega_0 t\sin\varphi >= \\ &= A_0\left[\cos\omega_0 t < \cos\varphi > - \sin\omega_0 t < \sin\varphi >\right] \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Учтем, что

$$< \cos\varphi >= \int_{-\infty}^{\infty}\cos\varphi W_{\varphi}(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\varphi d\varphi = 0 \tag{5.2.2}$$

Аналогично

$$< \sin\varphi >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\varphi d\varphi = 0 \tag{5.2.3}$$

Следовательно, $<x(t)>=0$, т.е. не зависит от времени.

Для корреляционной функции получим

$$\begin{aligned} &K_x[t_1,t_2] =< x(t_1)x(t_2) >=< A_0^2\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)\cos(\omega_0 t_2 + \varphi) >= \\ &=< A_0^2\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)\cos(\omega_0 t_1 + \omega_0\tau + \varphi) >= \\ &= \frac{A_0^2}{2}[< \cos(2\omega_0 t_1 + \omega_0\tau + 2\varphi) > + < \cos(\omega_0\tau) >] = \frac{A_0^2}{2}\cos(\omega_0\tau) \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

При выводе (5.2.4) учтено, что $t_2 = t_1 + \tau$, $< \cos(2\varphi) >= 0$, $< \sin(2\varphi) >= 0$. Таким образом, корреляционная функция зависит только от разности времен $t_2-t_1=\tau$.

Можно также показать, что при равномерном распределении фазы (2.3.3) условие стационарности будет выполняться для моментов любого порядка. Следовательно, n-мерная плотность вероятность будет инвариантна относительно сдвига по времени, что означает стационарность процесса и в узком смысле.

Пример 2:

Рассмотрим общий случай квазидетерминированного случайного процесса вида $x(t)=s(t+\tau_0)$, где $s(t)$ – детерминированная периодическая функция с периодом T (см. рис. 23), τ_0 – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, T]$ (см. рис. 24), плотность вероятности которой равна

$$W(\tau_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}, & 0\le\tau_0\le T,\\ 0, & \tau_0<0, \tau_0>T,\end{cases} \tag{5.2.5}$$

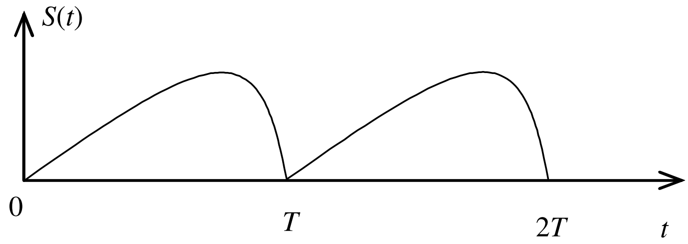

Рис. 23. Детерминированная периодическая функция с периодом T

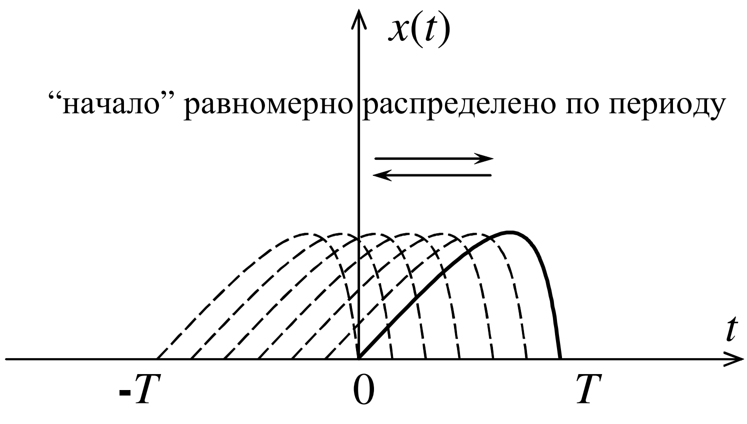

Рис. 24. Реализации квазидетерминированного случайного процесса

Докажем, что рассматриваемый процесс стационарен в широком смысле.

Среднее по статистическому ансамблю такого процесса может быть найдено следующим образом:

$$< x(t) >=< s(t+\tau_0) >= \int_0^T s(t+\tau_0)\frac{1}{T}d\tau_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(u)du =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T s(u)du = m_x = const \qquad (5.2.6),$$

где $u = t + \tau_0$

Корреляционная функция процесса с учетом (5.2.5) будет равна

$$K_x[t,t+\tau] =< x(t)x(t+\tau) >= \frac{1}{T}\int_0^T s(t+\tau_0)s(t+\tau_0+\tau)d\tau_0 =$$
$$= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(u)s(u+\tau)du = \frac{1}{T}\int_0^T s(u)s(u+\tau)du = K_x[\tau]. \qquad (5.2.7)$$

Последнее равенство написано на том основании, что подинтегральная функция является периодической с периодом *T*, и интеграл не будет зависеть от начала интегрирования. Таким образом, корреляционная функция зависит только от разности времен τ.

Мы можем сделать общий **вывод** о том, что все квазидетерминированные случайные процессы, порождаемые периодическими функциями с началом, которое равномерно распределено по периоду, стационарны, по крайней мере, в широком смысле.

5.3. Эргодичность случайных процессов.

Известно, что случайный процесс задается бесконечным в общем случае ансамблем своих реализаций. В большинстве экспериментов исследователи и инженеры работают с одной лабораторной установкой, с одной радиотехнической схемой и т.п., то есть имеют в своем распоряжении одну реализацию случайного процесса, наблюдаемую за какой-то промежуток времени [0,*T*].

Возникает вопрос: а нельзя ли усреднение по статистическому ансамблю, то есть «поперек» случайного процесса, заменить усреднением соответствующих величин «вдоль» одной реализации случайного процесса?

Например, простейшая характеристика случайного процесса – среднее значение $< x(t) >= \int\limits_{-\infty}^{\infty} xW(x,t)dx$ является теоретическим усреднением по ансамблю. Для экспериментальной оценки среднего значения по теореме Чебышева [3] следует взять M реализаций и воспользоваться формулой

$$< x(t) >= \lim_{M \to \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} x_k(t) \qquad (5.3.1)$$

Очевидно, что для нестационарных процессов это единственный путь, так как результаты при разных t будут разными и усреднение по времени даст заведомо неверный результат. А для стационарных процессов можно ли заменить усреднение по ансамблю усреднением по времени?

Эргодичность по отношению к среднему значению случайного процесса.

В качестве оценки статистического среднего стационарного процесса $<x(t)>=m_x$ представляется естественным взять среднеинтегральное значение реализации на интервале наблюдения $[0,T]$, равное

$$\bar{x}_k^T = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T x_k(t)dt \,. \qquad (5.3.2)$$

Это конкретное значение (число), найденное путем обработки k-й реализации. Будет ли оно близко в каком-либо смысле к истинному значению $<x>=m_x=const$ среднего статистического по ансамблю? Мы должны гарантировать эту близость для всех возможных реализаций, то есть вне зависимости от проводимого эксперимента. Поэтому удобно рассматривать характеристики случайной величины.

Для стационарного процесса среднее значение

$$< \bar{x}^T >=< \hat{m}_x^T >=< x > . \qquad (5.3.3)$$

Про такую оценку говорят, что она является несмещенной [10].

Определение: Говорят, что случайный процесс $x(t)$ обладает эргодическим свойством относительно среднего значения, если среднее по времени (5.1.2) - (5.1.6) при $T \to\infty$ сходится к среднему по статистическому ансамблю, то есть

$$\lim_{T\to\infty} \bar{x}^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = m_x .$$

$$\bar{x}^T \to \;< x >= m_x \tag{5.3.4}$$

Это равенство следует понимать в смысле сходимости по вероятности или в среднеквадратическом смысле.

1. Сходимость по вероятности $\bar{x}^T \xrightarrow{Сх.по\,вер.} < x >$ означает, что для любой величины $\varepsilon>0$ существует величина $\delta>0$ такая, что вероятность $P\{|\,\bar{x}^T - < x >| < \varepsilon\} > 1-\delta$ при некотором $T>T_0$. Это означает, что

$$\lim_{T\to\infty} P\{|\,\bar{x}^T - < x >| < \varepsilon\} = 1. \tag{5.3.5}$$

Или, что эквивалентно, $\lim\limits_{T\to\infty} P\{|\,\bar{x}^T - < x >| > \varepsilon\} = 0$.

2. Сходимость в среднеквадратическом смысле (limit in the mean square) $\lim\limits_{T\to\infty} \bar{x}^T \underset{T\to\infty}{\overset{Ср.кв.}{\to}} < x >$ означает, что

$$\lim_{T\to\infty} < [\bar{x}^T - < x >]^2 >= \lim_{T\leftarrow\infty} \sigma^2_{\bar{x}^T} = 0. \tag{5.3.6}$$

В силу неравенства Чебышева

$$\lim_{T\to\infty} P\{|\,\bar{x}^T \quad < x >| > \varepsilon\} \le \frac{\sigma^2_{\bar{x}^T}}{\varepsilon^2} \underset{\sigma^2_{\bar{x}^T}\to 0}{\to} 0. \tag{5.3.7}$$

Поэтому сходимости в среднеквадратическом смысле следует сходимость по вероятности. В физических курсах обычно пользуются среднеквадратичной сходимостью случайных величин в силу удобства доказательства и физического смысла. И мы будем использовать эту сходимость тоже.

Стационарность является необходимым условием для эргодичности, но, оказывается, не достаточным! Каким дополнительным условиям должен удовлетворять случайный стационарный процесс $x(t)$, чтобы выполнялось равенство (5.3.4) в смысле (5.3.6)? Для ответа найдем выражение для дисперсии $\sigma^2_{\bar{x}^T}$ случайной величины $\bar{x}^T$, исследуем ее поведение при $T\to\infty$ и выясним, при каких условиях выполняется условие (5.3.6).

Поскольку $<\bar{x}^T>=\frac{1}{T}\int\limits_0^T <x>dt=<x>$, то последовательно получим, что

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\bar{x}^T} &=<[\bar{x}^T-<\bar{x}^T>]^2>=<[\bar{x}^T-<x>]^2>=<\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T (x(t)-<x>)dt\right]^2>= \\
&=<\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T [x(t_1)-<x>]\cdot[x(t_2)-<x>]dt_1dt_2>= \\
&=\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T <[x(t_1)-<x>]\cdot[x(t_2)-<x>]>dt_1dt_2= \\
&=\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T B_x[t_1,,t_2]dt_1dt_2=\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T B_x[t_2-t_1]dt_1dt_2,
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

где последнее равенство следует из стационарности случайного процесса $x(t)$.

Упростим этот двойной интеграл. Для этого перейдем от переменных t_1 и t_2 к переменным t_0 и τ с помощью следующих выражений:

$$\begin{cases}\tau=t_2-t_1\\ t_0=\dfrac{t_2+t_1}{2}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}t_1=t_0-\dfrac{\tau}{2}\\ t_2=t_0+\dfrac{\tau}{2}\end{cases} \tag{5.3.9}$$

Модуль якобиана преобразований $|J| = \left|\dfrac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(t_0,\tau)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t_1}{\partial t_0} & \dfrac{\partial t_1}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial t_2}{\partial t_0} & \dfrac{\partial t_2}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} = 1$. На рис. 25 показана область интегрирования и приведены уравнения соответствующих границ этой области.

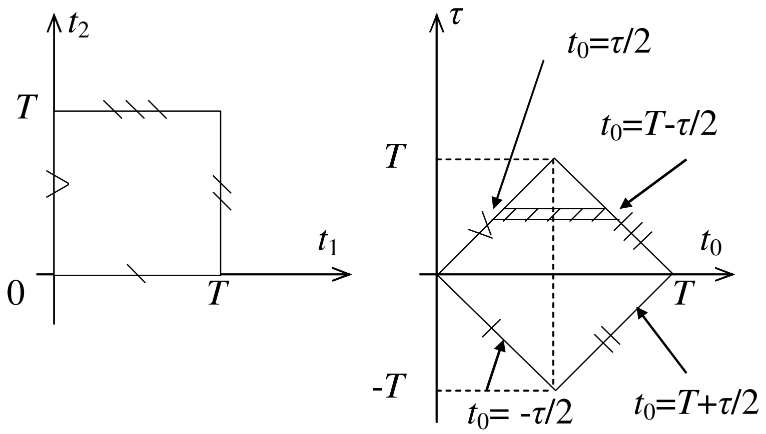

Рис. 25. Области интегрирования

Выполнив интегрирование по t_0, получим

$$\sigma^2_{\bar{x}^T} = \frac{1}{T^2}\iint\limits_{\Delta} B_x[\tau]dt_0 d\tau = \frac{1}{T^2}\int\limits_{-T}^{T} B_x[\tau] \int\limits_{\frac{|\tau|}{2}}^{T-\frac{|\tau|}{2}} dt_0 d\tau =$$
$$= \frac{1}{T^2}\int\limits_{-T}^{T}(T-|\tau|)\cdot B_x[\tau]d\tau = \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\cdot B_x[\tau]d\tau \qquad (5.3.10)$$

Где Δ – ромб. Или, окончательно,

$$\sigma^2_{\bar{x}^T} = \frac{1}{T}\int\limits_{T}^{T} 1 \quad \frac{|\tau|}{T} \quad B_x[\tau]d\tau = \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T} 1 \quad \frac{|\tau|}{T} \quad B_x[\tau]d\tau \qquad (5.3.11)$$

Из (5.3.6) и (5.3.11) следует следующее утверждение: для того, чтобы стационарный в широком смысле случайный процесс $x(t)$ был эргодичен относительно среднего значения**,** необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(1-\frac{\tau}{T})B_x[\tau]d\tau=0\,. \qquad (5.3.12)$$

Замечание: Чтобы проверить, является ли случайный процесс эргодическим по отношению к среднему квадратичному, нужно знать его ковариационную функцию!

Условие эргодичности (5.3.12) будет выполняться, если выполняется практически эквивалентное ему достаточное условие эргодичности Слуцкого

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T B_x[\tau]d\tau=0\,, \qquad (5.3.13)$$

или еще более сильное, но легко проверяемое достаточное условие

$$\lim_{\tau\to\infty} B_x[\tau]=0\,. \qquad (5.3.14)$$

Это условие имеет простой физический смысл. Из него имеем, что $<x(t)x(t+\tau)>\to<x(t)><x(t+\tau)>$, то есть значения случайного процесса, эргодичские по отношению к среднему, становятся некоррелированными.

Примеры:

1. Для квазидетерминированного случайного процесса $x(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$ с фазой равномерно распределенной в интервале $\varphi\in[-\pi,\pi]$ мы уже видели, что среднее и дисперсия равны $<x>=0$, $B_x[\tau]=\frac{A_0^2}{2}\cos\omega_0\tau$, то есть данный процесс стационарен в широком смысле.

Условие (5.3.14) не выполняется, но условие Слуцкого (5.3.13) и (5.3.12) выполняются, то есть процесс является эргодическим по отношению к среднему значению.

2. Для каких стационарных процессов условие (5.3.12) не выполняется? Каков физический смысл этого условия?

Рассмотрим пример стационарного, но не эргодического процесса $x(t)$. Его можно представить в виде $x(t) = \xi(t) + A$, где $\xi(t)$ - стационарный и эргодический процесс с нулевым средним значением ($<\xi(t)>= 0$) и функцией корреляции $K_{\xi}[\tau]$; A – случайная величина с нулевым средним ($<A>=0$) и некоторой плотностью вероятности $W_A(A)$. Будем считать, что A, $\xi(t)$ - статистически независимые для любых t.

Каков процесс $x(t)$?

Имеем, что $< x(t) >=<\xi(t)> + < A >= 0$. Функция ковариации

$$\begin{aligned} B_x[\tau] = K_x[\tau] =&< x(t)\cdot x(t+\tau) >=<\xi(t)\cdot\xi(t+\tau)> + \\ &+ < A^2 > + <\xi(t)\cdot A> + <\xi(t+\tau)\cdot A> \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

В силу статистической независимости последние два слагаемых равны нулю. Поэтому

$$B_x[\tau] = B_{\xi}[\tau] + < A^2 >. \tag{5.3.16}$$

То есть по определению (5.1.2)–(5.1.6) процесс $x(t)$ стационарен в широком смысле. Необходимое и достаточное условие (5.3.12) выполняться, однако, не будет. В самом деле

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})B_{\xi}[\tau]d\tau + \frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T}) < A^2 > d\tau\right\} = \frac{< A^2 >}{2}. \tag{5.3.17}$$

То есть $x(t)$ – случайный неэргодический процесс, если $< A^2 > \neq 0$.

Рассмотрим частный случай, когда плотность вероятности случайной величины A равна а $W_A(A) = 0.5[\delta(A - A_0) + \delta(A + A_0)]$, то есть величина A может принимать с одинаковой вероятностью два значения $\pm A_0$.

Реализации $\xi(t)$ смещаются на $+A_0$ или $-A_0$. Поэтому статистический ансамбль реализаций $x(t)$ разбивается на два подансамбля, со смещенными средними значениями $+A_0$ или $-A_0$. При этом $<x(t)>=0$, так как смещения равновероятны.

Если взять среднее значение от любой реализации из первого подансамбля, то получим, что $\lim\limits_{T\to\infty} \overline{x}_{(1)}^{T} = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_{l(1)}dt = A_0$. Для второго подансамбля будем иметь, что

$\lim\limits_{T\to\infty} \bar{x}_{(2)}^{T} = -A_0$. Следовательно, нельзя по одной реализации найти истинное среднее случайного процесса. Поэтому процесс не является эргодическим по отношению к среднему значению.

Статистический ансамбль для случайного процесса $x(t)=\xi(t)+A$ выглядит следующим образом (рис. 26).

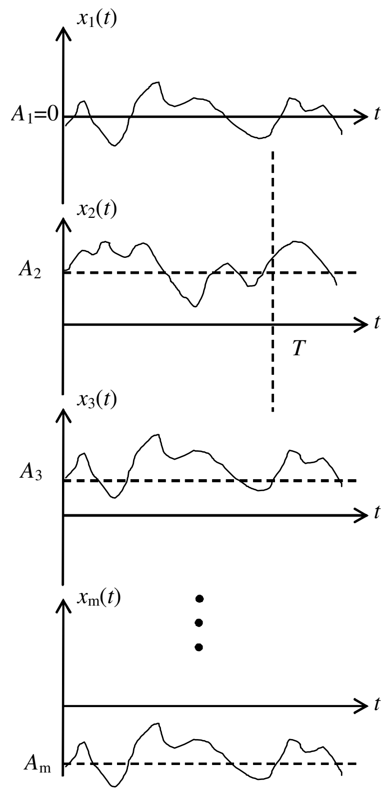

Рис. 26 Статистический ансамбль для $x(t)$

Обобщение условия эргодичности на другие статистические характеристики случайного процесса.

Мы рассмотрели свойство эргодичности случайного процесса только относительно простейшей его характеристики – среднему значению. Можно было бы рассмотреть свойство эргодичности случайного процесса относительно других статистических характеристик: дисперсии, корреляционной функции, одномерной плотности вероятности, различных моментных функций и т.д.

<u>Определение.</u> Случайный процесс $x(t)$ называется эргодическим по отношению к какой-то статистической характеристике, если определение этой характеристики путем усреднения

по времени по любой одной реализации совпадает с результатом, полученным усреднением по статистическому ансамблю.

Совпадение понимается в вероятностном смысле: сходимость по вероятности или сходимость в среднеквадратическом смысле.

Определение. Случайный процесс $x(t)$ называется эргодическим в узком (строгом) смысле, если он эргодический относительно всех своих вероятностных характеристик.

Эргодичность случайного процесса относительно корреляционной функции.

Предположим, что нам надо записать условие эргодичности относительно корреляционной функции стационарного в узком смысле случайного процесса $x(t)$. Корреляционная функция равна

$$K_x[\tau] \equiv < x(t)x(t+\tau) > . \tag{5.3.18}$$

Временной аналог корреляционной функции (корреляционная функция по времени) дает метод экспериментального измерения $K_x[\tau]$ по одной реализации:

$$\mathrm{K}_x^T[\tau] \equiv \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt . \tag{5.3.19}$$

Для эргодических процессов

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{K}_x^T[\tau] \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt = \mathrm{K}_x[\tau], \tag{5.3.20}$$

то есть $\mathrm{K}_x^T[\tau] \xrightarrow[T\to\infty]{} K_x[\tau] \equiv < x(t)x(t+\tau) >$ в среднеквадратическом смысле.

Для неэргодических процессов эти функции не совпадают.

Введём вспомогательный случайный процесс $y(t)=x(t)x(t+\tau)$. Условие эргодичности исходного случайного процесса по отношению к корреляционной функции, это есть условие эргодичности для вспомогательного процесса $y(t)$ по отношению к среднему значению.

Запишем необходимое и достаточное условие эргодичности (5.3.12) относительно среднего значения этого процесса

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau'}{T}\right)B_y[\tau']d\tau'=0\,, \tag{5.3.21}$$

где $B_y[\tau']\equiv\langle y(t)\cdot y(t+\tau')\rangle-\langle y(t)\rangle\cdot\langle y(t+\tau')\rangle$ - ковариационная функция случайного процесса $y(t)$.

В силу стационарности можно положить t=0. Тогда получим, что

$$\begin{aligned}&B_y[\tau']=\langle x(t)x(t+\tau)x(t+\tau')x(t+\tau+\tau')\rangle-\\&-\langle x(t)x(t+\tau)\rangle\langle x(t+\tau')x(t+\tau+\tau')\rangle=\alpha_4^{(x)}(0,\tau,\tau',\tau+\tau')-K_x^2[\tau]\end{aligned} \tag{5.3.22}$$

Для того чтобы исследовать эргодичность процесса $x(t)$ по отношению к его корреляционной функции, необходимо исследовать его четвертую моментную функцию.

Если при $\tau'\to\infty$

$$B_y[\tau']=\alpha_4^{(x)}(0,\tau,\tau',\tau+\tau')-K_x^2[\tau]\xrightarrow[\tau'\to\infty]{}0\,, \tag{5.3.23}$$

то случайный процесс будет обладать свойством эргодичности относительно корреляционной функции (достаточное условие).

Статистическое среднее по ансамблю равно

$$\langle y(t)\rangle=\langle x(t)x(t+\tau)\rangle=K_x[\tau]. \tag{5.3.24}$$

Временной аналог представляет собой среднее по времени от вспомогательного случайного процесса.

$$\mathrm{K}_x^T[\tau]=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt=\overline{y^T}\;. \tag{5.3.25}$$

Проверим стационарный процесс на эргодичность. При эргодичности $\overline{y^T}\xrightarrow[T\to\infty]{}\langle y(t)\rangle$ в среднеквадратическом смысле.

Проблема упрощается, если $x(t)$ стационарный гауссов случайный процесс с нулевым средним ($\langle x(t)\rangle=0$). Тогда имеем

$$\alpha_4^x(0,\tau,\tau',\tau+\tau')=B_x[\tau]B_x[\tau]+B_x[\tau']B_x[\tau']+B_x[\tau+\tau']B_x[\tau'-\tau] \tag{5.3.26}$$

Если при $\tau' \to \infty$ ковариационная функция $B_x[\tau'] \to 0$, то $B_x[\tau+\tau'] \to 0$ и $B_x[\tau'-\tau] \to 0$. Теперь получим

$$\alpha_4^x(0,\tau,\tau',\tau+\tau') \xrightarrow[\tau'\to\infty]{} B_x^2[\tau] \qquad (5.3.27)$$

При выполнении этого условия гауссов случайный процесс будет обладать свойством эргодичности относительно ковариационной функции (достаточное условие).

Эргодичность случайного процесса по отношению к одномерной плотности вероятности.

Пусть $x(t)$ стационарный процесс с плотностью вероятности $W(x,t)=W(x)$. Что нужно усреднять, когда в наличии всего одна реализация? Как ввести вспомогательный случайный процесс?

Выберем вспомогательный процесс в виде $y(t)=\delta[x\text{-}x(t)]$, мы легко получим необходимое и достаточное условие эргодичности для одномерной плотности вероятности.

Для детерминированного процесса плотность вероятности (см. Приложение 1, пункт 6) равна

$$W(x_1,t_1;...;x_n,t_n) = \prod_{i=1}^{n} \delta[x_i - x(t_i)] \qquad (5.3.28)$$

Докажем, что $W(x,t) =< \delta[x - x(t)] >$. Имеем

$$< \delta[x - x(t)] > = \int_{-\infty}^{\infty} \delta[x - x'(t) W(x',t) dt = W(x,t) \qquad (5.3.29)$$

Аналогично для двумерной плотности вероятности из (5.3.28) можно получить, что

$$W(x_1,t_1;...;x_n,t_n) = \delta[x_1 - x(t_1) \delta[x_2 - x(t_2) \qquad (5.3.30)$$

Таким образом, эргодичность случайного процесса $x(t)$ по отношению к одномерной плотности вероятности сводится к эргодичности вспомогательного процесса $y(t)$ по отношению к его среднему.

Условие эргодичности (5.3.12) принимает вид

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau'}{T}\right)B_y[\tau']d\tau'=0\,, \tag{5.3.31}$$

где $B_y[\tau']$-ковариационная функция вспомогательного процесса $y(t)$. С учетом (5.3.30) имеем, что

$$\begin{aligned}&B_y[\tau']=<y(t)y(t+\tau')>-<y(t)><y(t+\tau')>=\\&=<\delta[x-x(t)]\delta[x-x(t+\tau')]>-<\delta[x-x(t)]><\delta[x-x(t+\tau')]>=\\&=W(x,t;x,t+\tau')-W(x,t)W(x,t+\tau')\end{aligned} \tag{5.3.32}$$

Рассмотрим достаточное условие эргодичности: $\lim\limits_{\tau'\to\infty}B_y[\tau']=0$. Когда оно будет выполняться? Очевидно, что для этого должно выполняться условие вида:

$$W(x,t;x,t+\tau')-W(x,t)W(x,t+\tau')\xrightarrow[\tau'\to\infty]{}0\,, \tag{5.3.33}$$

или, принимая во внимание стационарность процесса $x(t)$,

$$W(x_1,t;x_2,t+\tau')\xrightarrow[\tau'\to\infty]{}W(x_1,t)W(x_2,t+\tau')=W(x_1)W(x_2)\,. \tag{5.3.34}$$

Поскольку $x(t)$ – стационарный процесс, то условие статистической независимости двух далеко отстоящих друг от друга значений случайного процесса является достаточным для его эргодичности по отношению к одномерной плотности вероятности.

Чтобы проверить условие эргодичности случайного процесса по отношению к одномерной плотности вероятности, нужно знать, как себя ведёт двумерная плотность вероятности.

5.4. Экспериментальное определение одномерной плотности вероятности

Пусть случайный процесс $x(t)$ эргодичен по отношению к одномерной плотности вероятности $W(x)$. Как экспериментально определить одномерную плотность вероятности по одной реализации? Для этого надо взять среднее по времени $[0,T]$ от случайной функции $y(t)$, которую введём по правилу (рис. 27):

$$y(t)=\delta[x-x(t)]=\lim_{\Delta x\to 0}\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta x}, & x-\dfrac{\Delta x}{2}\le x(t)\le x+\dfrac{\Delta x}{2}\\ 0, & x(t)<x-\dfrac{\Delta x}{2},\ x(t)>x+\dfrac{\Delta x}{2}\end{cases}, \qquad (5.4.1)$$

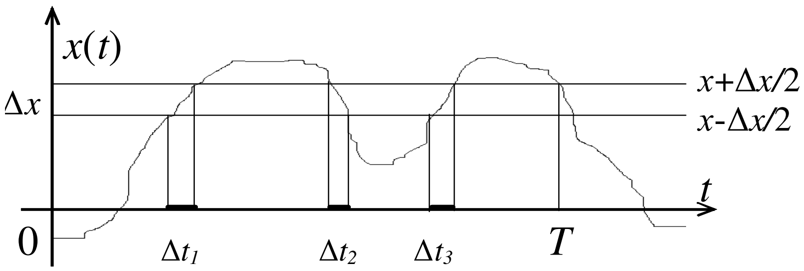

Рис. 27. К экспериментальному определению одномерной плотности вероятности

При этом оценка плотности вероятности принимает вид

$$W'(x)=\lim_{T\to\infty}\overline{y^T}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\begin{Bmatrix}1, x(t)\in[\Delta x]\\ 0, x(t)\notin[\Delta x]\end{Bmatrix}dt=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\Delta x}\frac{1}{T}\int_0^T\begin{Bmatrix}1, x(t)\in[\Delta x]\\ 0, x(t)\notin[\Delta x]\end{Bmatrix}dt=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\Delta x}\frac{T_{\Delta x}}{T} \qquad (5.4.2)$$

где $T_{\Delta x}=\sum\limits_k \Delta t_k$, Δt_k – отрезок времени, в течение которого значения реализации процесса находятся внутри указанного окна Δx.

В итоге имеем, что

$$W'(x)\Delta x=\lim_{T\to\infty}\frac{T_{\Delta x}}{T}=W(x)\Delta x \qquad (5.4.3)$$

Выводы об эргодичности случайного процесса:

1. Множество эргодических случайных процессов является подмножеством стационарных случайных процессов (рис. 28).

Рис. 28. Иллюстрация соотношения между стационарными и эргодическими случайными процессами

2. Любая реализация эргодического случайного процесса содержит всю информацию о случайном процессе, то есть эквивалентна статистическому ансамблю (рис. 29). Реализацию эргодического процесса можно “разрезать” на “куски” длительностью T и составить из них статистический ансамбль.

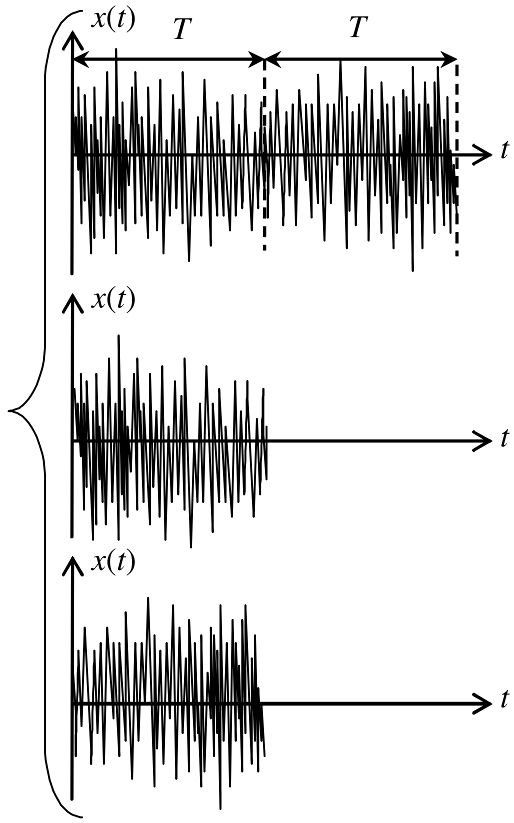

Рис. 29. Иллюстрация эквивалентности реализации эргодического случайного процесса статистическому ансамблю

3. Для стационарного, но неэргодического случайного процесса характерна внутренняя неоднородность множества реализаций (то есть статистического ансамбля). Он как бы «разложим» на более простые эргодические процессы (источники). Существуют строгие математические теоремы о том, что любой стационарный источник можно рассматривать как комбинацию взаимоисключающих эргодических источников [11]. Физически неэргодичность стационарных случайных процессов связана с тем, что мы «неправильно» создали статистический ансамбль, отнеся, например, разные генераторы к одному ансамблю.

4. Неэргодические случайны процессы существенно “хуже” эргодических, поскольку для экспериментального определения статистических характеристик приходится работать с большим ансамблем реализаций. Однако и неэргодические процессы также исследуются. Например, представляют большой интерес нестационарные процессы установления или настройки различных систем (средняя скорость установления, точность настройки) (см. рис. 30), а также движение броуновских частиц в потенциальной яме (см. рис. 31).

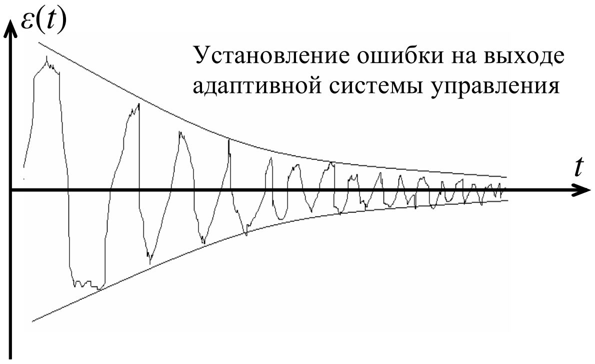

Рис. 30. Установление ошибки на выходе адаптивной системы управления

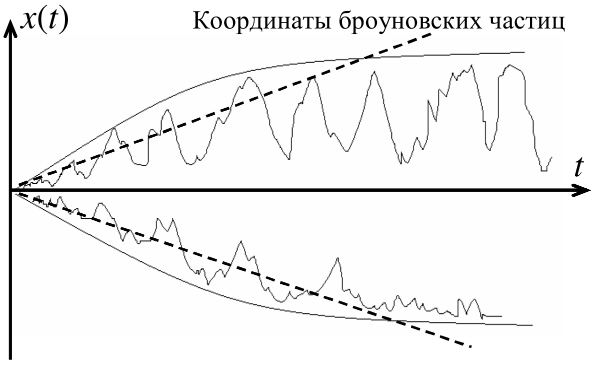

Рис. 31. Пример нестационарного процесса

6. Совокупность случайных процессов

До сих пор мы рассматривали способы описания, различные вероятностные характеристики и свойства одного случайного процесса. Во многих практических задачах приходится изучать одновременно два или большее число случайных процессов.

6.1. Описание совокупности случайных процессов

Пусть дана упорядоченная пара случайных процессов $\{x(t), y(t)\}$, например $x(t)$ – процесс на входе линейной системы, а $y(t)$ – на выходе линейной системы. В общем случае нас интересует связь этих процессов в любые моменты времени. Полное описание данной совокупности возможно введением совместной плотности вероятности, например если из процесса $x(t)$ берётся n точек, а из процесса $y(t)$ – n' точек, то нужно ввести $(n+n')$-мерную плотность вероятности. Поступая аналогично подразделу 1.1 можно записать, что

$$\begin{aligned} &W_{xy}(x_1,t_1;\ldots,x_n,t_n;y_1,t_1';\ldots;y_{n'}t_{n'}') = \\ &= P\begin{Bmatrix} x_i \le x(t_i) \le x_i + dx \\ y_k \le y(t_k') \le y_k + dy \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,n \\ k = 1,2,\ldots,n' \end{matrix} \end{aligned} \qquad (6.1.1)$$

Данная плотность вероятности обладает всеми свойствами n-мерной плотности вероятности случайного процесса, кроме свойства симметрии. Свойство симметрии выполняется не полностью, возможна перестановка пар аргументов x_i, t_i по следующему правилу:

$$x_i, t_i \overset{\rightarrow}{\leftarrow} x_j, t_j \parallel y_k, t_k' \overset{\rightarrow}{\leftarrow} y_l, t_l' . \qquad (6.1.2)$$

Основной интерес, возникающий при рассмотрении совокупности случайных процессов, относится к их статистической взаимосвязи.

Определение. Два случайных процесса $x(t)$ и $y(t)$ называются статистически независимыми, если их $(n+n')$-мерная плотность вероятности для любых n и n' «распадается» на произведение n-мерной плотности вероятности процесса $y(t)$ и n'-мерной плотности вероятности процесса $x(t)$, то есть

$$W_{xy}(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n;y_1,t_1';\ldots;y_{n'},t_{n'}') = \\ = W_x(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n)W_y(y_1,t_1';\ldots;y_{n'},t_{n'}'), \qquad (6.1.3)$$

В противном случае говорят, что между процессами $x(t)$ и $y(t)$ имеется статистическая связь и эти процессы взаимозависимы.

6.2. Характеристики совокупности случайных процессов

Совершенно аналогичным образом можно ввести все те характеристики, которые были введены для одного случайного процесса. Например, совместная характеристическая функция:

$$\Theta_{xy}(u_1,t_1;\ldots;u_n,t_n;v_1,t_1';\ldots;v_{n'},t_{n'}') = \\ =< \exp\left\{j[u_1x(t_1)+\ldots+u_nx(t_n)]+j[v_1y(t_1')+\ldots+v_{n'}y(t_{n'}')]\right\}>, \qquad (6.2.1)$$

где усреднение ведётся по всем случайным величинам x и y.

Аналогично введём совместную моментную функцию 2-х случайных процессов $(s+p)$-го порядка, как среднее от произведения:

$$\alpha_{s,p}^{x,y}(t_1,t_2,\ldots,t_s;t_1',t_2',\ldots,t_p') =< x(t_1)x(t_2)\ldots x(t_s)y(t_1')y(t_2')\ldots y(t_p')>. \qquad (6.2.2)$$

Если процессы статистически независимы, то любая совместная моментная или характеристическая функция «распадается» на произведение соответствующих функций для каждого процесса по отдельности:

$$\alpha_{s,p}^{x,y}(t_1,t_2,\ldots,t_s;t_1',t_2',\ldots,t_p') =< x(t_1)x(t_2)\ldots x(t_s)>< y(t_1')y(t_2')\ldots y(t_p')>. \qquad (6.2.3)$$

Наиболее важными статистическими характеристиками случайных процессов являются моментные функции 1-го и 2-го порядков. Например, пусть $x(t)$, $y(t)$ – два случайных процесса. Тогда:

$$\alpha_1^x(t) =< x(t)>\equiv m_x(t), \qquad \alpha_1^y(t) =< y(t)>\equiv m_y(t), \\ \alpha_2^x(t_1,t_2) =< x(t_1)x(t_2)>\equiv K_x[t_1,t_2], \quad \alpha_2^y(t_1,t_2) =< y(t_1)y(t_2)>\equiv K_y[t_1,t_2], \qquad (6.2.4)$$

где $m_x(t)$, $m_y(t)$ – средние значения, а $K_x[t_1, t_2]$, $K_y[t_1, t_2]$ – корреляционные функции соответствующих случайных процессов.

Можно ввести смешанный момент 2-го порядка или взаимную корреляционную функцию

$$\alpha_{1,1}^{x,y}(t_1,t_2) = < x(t_1)y(t_2) > \equiv K_{xy}[t_1,t_2], \tag{6.2.5}$$

а также взаимную ковариационную функцию

$$B_{xy}[t_1,t_2] = < x(t_1)y(t_2) > - < x(t_1) >< y(t_2) > \equiv K_{xy}[t_1,t_2] - m_x(t_1)m_y(t_2), \tag{6.2.6}$$

и взаимный коэффициент корреляции:

$$R_{xy}[t_1,t_2] = \frac{B_{xy}[t_1,t_2]}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)} = \frac{B_{xy}[t_1,t_2]}{\sqrt{B_x[t_1,t_1]B_y[t_2,t_2]}}. \tag{6.2.7}$$

Из формулы для взаимной корреляционной функции видно, что она обладает своеобразным свойством симметрии:

$$K_{xy}[t_1,t_2] = < x(t_1)y(t_2) > = < y(t_2)x(t_1) > = K_{yx}[t_2,t_1]. \tag{6.2.8}$$

Из (6.2.8) следует, что для автокорреляционной функции свойство симметрии будет выполняться в чистом виде:

$$K_{xx}[t_1,t_2] = K_{xx}[t_2,t_1]. \tag{6.2.9}$$

Утверждение аналогичное (6.2.8) справедливо также для взаимной ковариационной функции $B_{xy}[t_1,t_2]$ и взаимный коэффициент корреляции $R_{xy}[t_1,t_2]$.

Определение. Два случайных процесса называют **взаимно некоррелированными**, если их взаимная ковариационная функция тождественно равна нулю для любых моментов времени t_1, t_2.

При этом взаимная корреляционная функция «распадается» на произведение средних, что видно из определения (6.2.6) взаимной ковариационной функции $B_{xy}[t_1,t_2]$. В самом деле, если $B_{xy}[t_1,t_2] = 0$, то из (6.2.6) получим, что $< x(t_1)y(t_2) > = < x(t_1) >< y(t_2) >$.

Определение. Из статистической независимости случайных процессов следует их некоррелированность:

$$
\begin{aligned}
&< x(t_1)\, y(t_2) >= \iint xyW_{xy}(x,t_1;\, y,t_2)dxdy = \\
&= \iint xyW_x(x,t_1)W_y(y,t_2)dxdy =< x(t_1) >< y(t_2) >
\end{aligned}
\qquad (6.2.10)
$$

Обратное утверждение в общем случае неверно, то есть из условия $< x(t_1)\, y(t_2) >=< x(t_1) >< y(t_2) >$ некоррелированности не следует условие $W_{xy}(x,t_1;y,t_2)=W_x(x,t_1)W_y(y,t_2)$ статистической независимости случайных процессов.

Свойство **стационарности и эргодичности** легко распространяется и на совокупности случайных процессов.

<u>Определение:</u> Совокупность случайных процессов $\{x(t), y(t)\}$ называется стационарной в строгом смысле, если их совместная плотность вероятности любого $(n+n')$-го порядка инвариантна к сдвигу во времени.

<u>Определение:</u> Совокупность случайных процессов $\{x(t), y(t)\}$ называется стационарной в широком смысле, если их средние значения постоянны и все совместные корреляционные и автокорреляционные функции зависят только от разности времён, то есть

$$
\begin{aligned}
&m_x(t) = const; \quad K_x[t_1,t_2] = K_x[t_2 - t_1] = K_x[\tau]; \\
&m_y(t) = const; \quad K_y[t_1,t_2] = K_y[t_2 - t_1] = K_y[\tau]; \\
&K_{xy}[t_1,t_2] = K_{xy}[t_2 - t_1] = K_{xy}[\tau].
\end{aligned}
\qquad (6.2.11)
$$

Автокорреляционная функция в этом случае является чётной относительно τ. Покажем это с помощью очевидных преобразований. Имеем

$$
\begin{aligned}
&K_x[\tau] = K_x[t,t+\tau] =< x(t)x(t+\tau) >==< x(t+\tau-\tau)x(t+\tau) >= \\
&=< x(t+\tau)x(t+\tau-\tau) >= K_x[(t+\tau),(t+\tau)-\tau] = K_x[-\tau].
\end{aligned}
\qquad (6.2.12)
$$

Совместная корреляционная функция обладает похожим свойством:

$$
\begin{aligned}
&K_{xy}[\tau] = K_{xy}[t,t+\tau] =< x(t)\, y(t+\tau) >=< x(t+\tau-\tau)\, y(t+\tau) >= \\
&=< y(t+\tau)x(t+\tau-\tau) >= K_{yx}[(t+\tau),(t+\tau)-\tau] = K_{yx}[-\tau].
\end{aligned}
\qquad (6.2.13)
$$

Далее, по умолчанию стационарность будет пониматься, как стационарность в широком смысле.

Вообще говоря, если два случайных процесса стационарны по отдельности, то они могут и не образовывать взаимно стационарную совокупность. Рассмотрим частный случай. Пусть даны два случайных процесса $\{x(t),\ y(t)\}$ такие, что (см. рис. 32):

$$\begin{aligned} x(t) &= \xi(t)\cos\omega_0 t + \eta(t)\sin\omega_0 t, \\ y(t) &= \xi(t)\sin\omega_0 t + \eta(t)\cos\omega_0 t, \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

где $\xi(t)$, $\eta(t)$ – стационарные случайные процессы с нулевыми средними значениями ($<\xi(t)>=<\eta(t)>=0$). Они некоррелированные между собой ($<\xi(t)\eta(t)>=0$) и имеют одинаковую функцию корреляции $K_\xi[\tau]=K_\eta[\tau]=K[\tau]$. выполняется:

Покажем, что $x(t)$, $y(t)$ стационарные процессы по отдельности, но образуют взаимно нестационарную совокупность. Имеем, что

$$< x(t) >=< \xi(t)\cos\omega_0 t + \eta(t)\sin\omega_0 t >=< \xi(t) > \cos\omega_0 t + < \eta(t) > \sin\omega_0 t = 0, \tag{6.2.14}$$

$$< y(t) >=< \xi(t)\sin\omega_0 t + \eta(t)\cos\omega_0 t >=< \xi(t) > \sin\omega_0 t + < \eta(t) > \cos\omega_0 t = 0, \tag{6.2.15}$$

$$\begin{aligned} & K_x[t,t+\tau] =< x(t)x(t+\tau) >=< \xi(t)\xi(t+\tau) > \cos\omega_0 t\cos[\omega_0(t+\tau)] + \\ & + < \eta(t)\eta(t+\tau) > \sin\omega_0 t\sin[\omega_0(t+\tau)] + \\ & + < \xi(t)\eta(t+\tau) > \cos\omega_0 t\sin[\omega_0(t+\tau)] + \\ & + < \eta(t)\xi(t+\tau) > \sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) = K[\tau]\cos\omega_0 t\cos[\omega_0(t+\tau)] + \\ & + K[\tau]\sin\omega_0 t\sin[\omega_0(t+\tau)] + 0 + 0 = K[\tau]\cos\omega_0\tau \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

Для корреляционной функции $K_y[t,\ t+\tau]$ получается такое же выражение.

Покажем, что для взаимной корреляционной функции зависимость от t устранить не удастся (см. рис. 33). Имеем, что

$$\begin{aligned} & K_{xy}[t,t+\tau] =< x(t)y(t+\tau) >=< \xi(t)\xi(t+\tau) > \cos\omega_0 t\sin[\omega_0(t+\tau)] + \\ & + < \eta(t)\eta(t+\tau) > \sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) + \\ & + < \xi(t)\eta(t+\tau) > \cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) + \\ & + < \eta(t)\xi(t+\tau) > \sin\omega_0 t\sin[\omega_0(t+\tau)] = \\ & = K[\tau]\cos\omega_0 t\sin[\omega_0(t+\tau)] + K[\tau]\sin\omega_0 t\cos[\omega_0(t+\tau)] + 0 + 0 = \\ & = K[\tau]\sin(2\omega_0 t + \omega_0\tau) \end{aligned} , \tag{6.2.17}$$

Отсюда следует взаимная нестационарность совокупности случайных процессов $\{x(t), y(t)\}$.

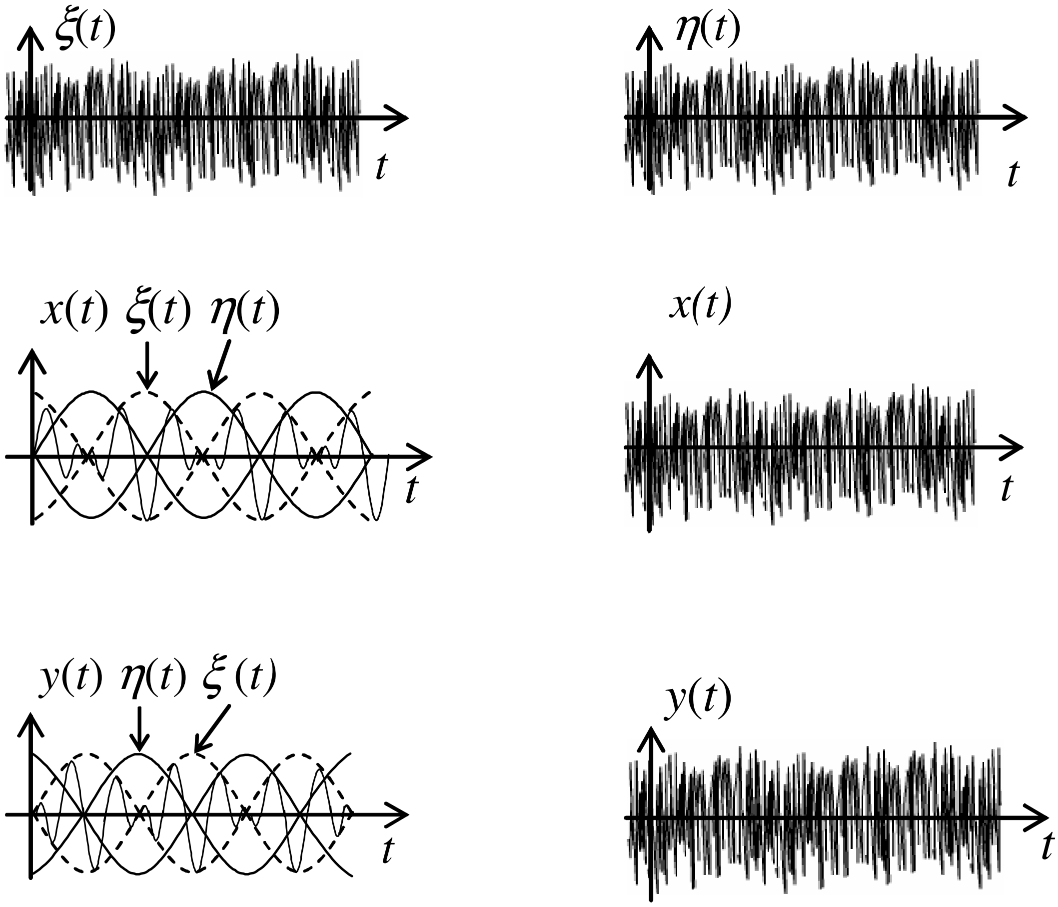

Рис. 32. Пример случайных процессов стационарных по отдельности, но не образующих взаимно стационарную совокупность

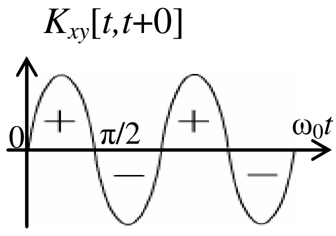

Рис. 33. Взаимная корреляционная функция процессов x и y

<u>Определение.</u> Совокупность случайных процессов $\{x(t),y(t)\}$ называется гауссовой, если эти процессы имеют совместное гауссово распределение.

Пусть $\vec{x}_z = \{x(t_1), x(t_2),..., x(t_n)\}^T$, $\vec{y}_z = \{y(t_1^{'}), y(t_2^{'}),..., y(t_{n'}^{'})\}^T$ - векторы наблюдений размерностью n и n', соответственно, а $\vec{z}_t = \{\vec{x}_t, \vec{y}_t\}^T = \{x(t_1),..., x(t_n), y(t_1),..., y(t_n)\}^T$ - расширенный вектор размерностью $n+n'$.

По отдельности $x(t)$ и $y(t)$ могут быть гауссовыми случайными процессами, но не образовывать гауссову совокупность случайных процессов.

Пример:

Пусть n=1; n'=1; $\{x(t),y(t')\}$ - гауссова совокупность, t и t' – заданные параметры. При этом плотность вероятности $W_{xy}(x,y)$ является гауссовой.

Каким образом можно деформировать W_{xy}, чтобы W_x и W_y не изменились?

Симметрично добавим и вычтем из этой двумерной плотности вероятности кубики массы (только так, чтобы плотность вероятности оставалась положительной), как показано на рис. 34. Получим новую двумерную плотность вероятности, но при этом одномерные плотности вероятности не изменяются.

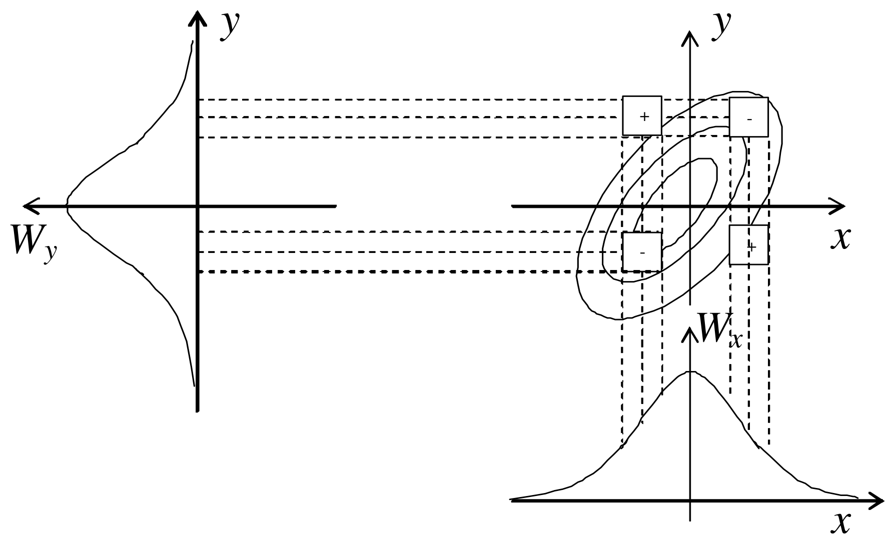

Рис. 34. Иллюстрация гауссовой совокупности

Замечание:

Если процессы x и y статистически независимы и имеют каждый гауссову плотность вероятности, то и их совместная плотность вероятности также будет гауссовой.

Приложение

1. Дельта-функция (функция Дирака, единичная импульсная функция или единичный δ-импульс).

Полезной функцией в теории случайных процессов является так называемая дельта-функция Дирака, или единичный импульс $\delta(x)$. По определению, дельта-функцией $\delta(x\text{-}x_0)$ называется такая функция, которая равна нулю всюду, кроме особой точки x_0, где она обращается в бесконечность (см. рис. П2):

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0\\ 0 & x\neq x_0\end{cases} \qquad \text{(П1)}$$

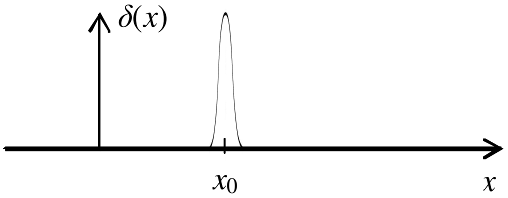

Рис. П1. Дельта-функция Дирака

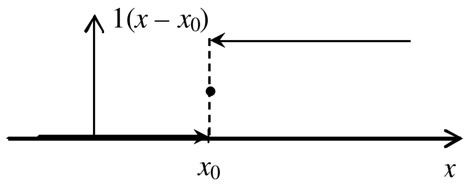

Рис. П2. Единичная функция Хэвисайда

Интеграл от дельта-функции, распространенный на сколь угодно малый отрезок 2ε, заключающий особую точку, равен единице:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)dx=1,\quad \varepsilon>0. \qquad \text{(П2)}$$

Дельта-функция является четной, то есть

$$\delta(x-x_0)=\delta(x_0-x) \qquad \text{(П3)}$$

и симметричной относительно особой точки x_0. Поэтому

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)dx=\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0}\delta(x-x_0)dx=\frac{1}{2},\quad \varepsilon>0 \qquad \text{(П4)}$$

2. Функция Хэвисайда.

С δ-функцией связана единичная функция $1(x-x_0)$ (функция единичного скачка или функция Хэвисайда), которая равна (см также рис. П2)

$$1(x-x_0) \equiv \int_{-\infty}^{x} \delta(x'-x_0)dx' = \begin{cases} 1, & при \quad x > x_0 \\ \dfrac{1}{2}, & при \quad x = x_0 \\ 0, & при \quad x < x_0 \end{cases} \tag{П5}$$

Из (П5) имеем, что

$$\frac{d1(x-x_0)}{dx} \equiv \delta(x-x_0) \tag{П6}$$

3. Предел δ- функции.

Импульсную функцию можно получить из любой фундаментальной функции (например, прямоугольного или треугольного импульса). В любом случае импульсная функция определяется в пределе (амплитуда импульса стремится к бесконечности, длительность импульса – к нулю, а площадь импульса равна единице). При доказательстве формул можно пользоваться наиболее удобной формой представления δ-функции.

$$\delta(x-x_0) = \lim_{\alpha \to 0} \varphi_\alpha(x-x_0) \tag{П7}$$

где в качестве функции $\varphi_\alpha(x-x_0)$ можно выбрать, например, следующие функции:

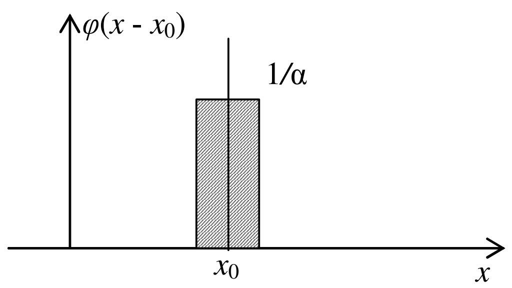

Рис. П3

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}, & |x| \le \dfrac{\alpha}{2} \\ 0, & |x| > \dfrac{\alpha}{2} \end{cases} \tag{П8}$$

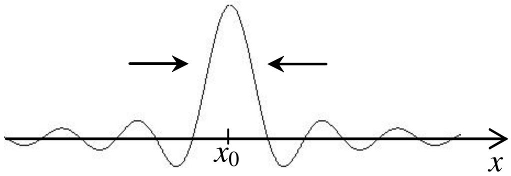

Рис. П3

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \qquad (П9)$$

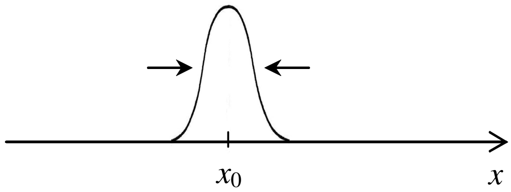

Рис. П5

$$\varphi_\alpha(x) = \alpha\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\right\} \qquad (П10)$$

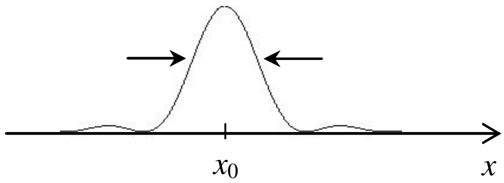

Рис. П6

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 \alpha x}{(\alpha x)^2} \qquad (П11)$$

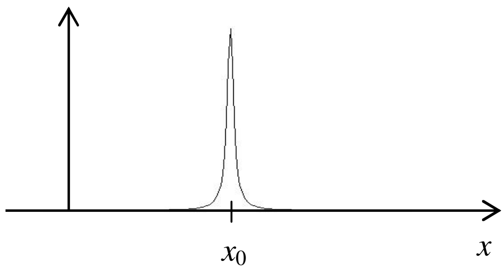

Рис. П7

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha^2 x^2} \qquad (П12)$$

4. Выкалывающие свойства δ-функции.

С помощью δ-функции существенно упрощается вычисление интегралов от непрерывных функций $f(x)$. Свертка δ-функции с любой ограниченной и непрерывной в точке x_0 функцией $f(x)$ обладает следующим замечательным свойством (которое поясняется на рис. П8):

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0), & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2} f(a), & x_0 = a \\ \frac{1}{2} f(b), & x_0 = b \\ 0, & x_0 < a, \quad x_0 > b \end{cases} \qquad (\text{П13})$$

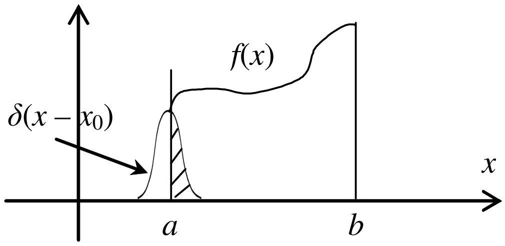

Рис. П8

Для непрерывной функции $f(x)$ справедливо равенство:

$$f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0) \qquad (\text{П14})$$

Из (П14) следует, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\delta(x-x_0)dx = \int_a^b \varphi(x) f(x_0)\delta(x-x_0)dx = \\ = \begin{cases} f(x_0)\varphi(x_0), & a < x_0 < b. \\ 0, & x_0 < a, \quad x_0 > b \end{cases} \qquad (\text{П15})$$

В частности, задавая $f(x) = \delta(x-v), \varphi(x) = \delta(x-u)$, получим, что

$$\int_a^b \delta(x-u)\delta(x-v)dx = \delta(u-v) = \delta(v-u), \quad a < u, v < b. \qquad (\text{П16})$$

Из свойства (П2) δ-функции будем иметь

$$\delta[c(x-x_0)] = \frac{1}{|c|}\delta(x-x_0) \qquad (\text{П17})$$

Отсюда следует, что чем больше постоянная c, тем более “узкой” становится δ-функция (см. выражения (П8-П12)).

Обобщением формулы (П14) является представление δ-функции от сложного аргумента [12] в виде:

$$\delta[\alpha(x)] = \sum_k \frac{\delta(x - x_0)}{\left|\alpha'_x(x)\right|_{x=x_k}} \tag{П18}$$

где x_k – все корни уравнения $\alpha(x)=0$.

Используя (П18) можно получить, что

$$\int_a^b f(x)\delta[\alpha(x)]dx = \int_a^b f(x)\sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{\left|\alpha'_x(x)\right|_{x=x_k}} dx = \sum_k \frac{f(x_k)}{\left|\alpha'_x(x_k)\right|}, \quad a < x_k < b \tag{П19}$$

Отсюда следует, что функция $\delta[\alpha(x)]$ «выкалывает» значения $f(x)$ в тех точках, где дифференцируемая (гладкая) функция $\alpha(x)$ равна нулю ($\alpha(x)=0$). Это свойство поясняется на рис. П9.

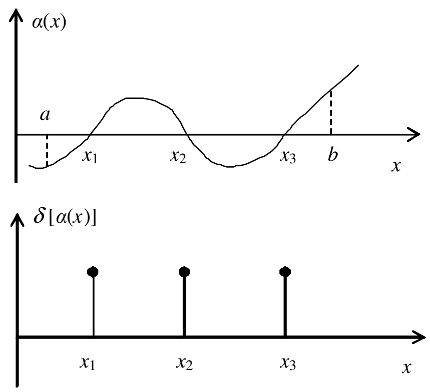

Рис. П9

5. Спектр δ-функции.

Справедливо следующее, часто используемое в спектрально-корреляционном анализе сигналов тождество [13]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j(x - x_0)u} du = \delta(x - x_0) \tag{П20}$$

Доказательство. Выполним очевидные преобразования и учтем формулу (П9). В результате будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(x-x_0)u}du = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(x-x_0)u}du = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j(x-x_0)u}}{j(x-x_0)}\right]_{-\alpha}^{\alpha} =$$
$$= \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{j(x-x_0)\alpha}-e^{-j(x-x_0)\alpha}}{j(x-x_0)} = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sin\alpha(x-x_0)}{\pi(x-x_0)} = \delta(x-x_0) \qquad (П21)$$

Если под x в формуле (П21) понимать время, а под переменной интегрирования u круговую частоту, то получим широко известное спектральное разложение дельта-импульса в интеграл Фурье

$$\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{+j\omega(t-t_0)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(t-t_0)d\omega \qquad (П22)$$

Прямое Фурье-преобразование от $\delta(t\text{-}t_0)$ легко находится. Имеем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t_0} \qquad (П23)$$

Если t_0=0, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1 \qquad (П24)$$

Более строго и полно можно найти это доказательство в Приложениях в книгах [2, 14].

6. “δ формализм”.

По определению среднего статистического от любой функции имеем, что

$$< f[x(t)] >\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x')W(x',t)dx' \qquad (П25)$$

Возьмём $f[x(t)] = \delta[x - x(t)]$. Тогда

$$< \delta[x - x(t)] > \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')W(x', t)dx' \equiv W(x, t) \qquad (П26)$$

Это тождество позволяет иногда (с учётом свойств дельта-функции) формально упростить некоторые выражения.

В качестве примера рассмотрим сумму $z(t)=x(t)+y(t)$ двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ и найдем ее плотность вероятности.

Пусть задано совместное распределение $W_{xy}(x,y)$, которое не зависит от t. Тогда, используя (П26) найдем, что

$$\begin{aligned} W_z(z) &= < \delta[z - z(t)] >_{z(t)} = < \delta[z - (x(t) + y(t))] >_{x(t),\, y(t)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta[z - (x + y)] W_{xy}(x, t; y, t) dx dy \; = \int_{-\infty}^{\infty} W_{xy}(x, z - x) dx \end{aligned} \qquad (П.27)$$

Для независимых случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ это выражение упрощается и принимает вид:

$$W_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(x) W_y(z - x) dx \qquad (П28)$$

Двумерную плотность вероятности можно представить аналогично (П26) в виде

$$\begin{aligned} W(x_1, t_1; x_2, t_2) &= < \delta[x_1 - x(t_1)] \delta[x_2 - x(t_2)] >_{x(t_1),\, x(t_2)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - x_1') \delta(x_2 - x_2') W(x_1', t_1; x_2', t_2) dx_1 dx_2 = W(x_1, t_1; x_2, t_2) \end{aligned} \qquad (П29)$$

Эту формулу можно обобщить и на n-мерный случай.

$$W(x_1, t_1; ...; x_n, t_n) = < \prod_{i=1}^{n} \delta[x_i - x(t_i)] > \qquad (П30)$$

Литература

1. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы М: Наука, 1976 - 491 с
2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.
3. Вентцель Е. С. «Теория вероятностей» 4-е изд. М.: Наука, 1969. — 576с.
4. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1979.
5. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. 2-е издание. М.: Наука, 1974.
6. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М., «Сов. радио», 1977
7. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М., «Сов. радио», 1978, 376 с.
8. Матрицы и вычисления. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.— М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.—320 с
9. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк Линейная алгебра, М.: Наука — Физматлит, 1999.
10. Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948;
11. Хемминг Р. В. Теория кодирования и теория информации. — М.: Радио и связь, 1983.
12. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. Издание второе, переработанное. ... 1988г. 512с.
13. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1975.
14. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М. Наука, 1968, с. 582.