

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

Библиотека Исследовательской школы
«Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах»

В.В. Матросов, К.Н. Алешин

ДИНАМИКА ЦЕПОЧЕК ФАЗОВЫХ СИСТЕМ С ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ СВЯЗЯМИ

Учебно-методические материалы для магистрантов и аспирантов

Нижний Новгород, 2014

ДИНАМИКА ЦЕПОЧЕК ФАЗОВЫХ СИСТЕМ С ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ СВЯЗЯМИ: Составители: Матросов В.В., Алешин К.Н. Учебно-методические материалы для магистрантов и аспирантов Исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 51 с.

Учебно-методические материалы предназначены для аспирантов ННГУ, обучающиеся по направлению подготовки 03.06.01 «Физика и астрономия» (специальности 01.04.03 – «Радиофизика», 01.04.06 – «Акустика») и магистрантов ННГУ, обучающиеся по направлениям подготовки 011800 – «Радиофизика», 010300 – «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Материалы знакомят читателя с математическими моделями и явлениями нелинейной динамики цепочек односторонне направленно связанных систем фазовой синхронизации. С применением качественно-численных методов нелинейной динамики и компьютерного моделирования исследуются динамические состояния исследуемых моделей, бифуркции и эволюция динамических режимов при изменении параметров моделей и числа элементов в цепочках.

Учебно-методические материалы подготовлены в соответствии с Программой повышения конкурентоспособности Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013 – 2020 годы и Программой развития Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского как национального исследовательского университета на 2009 – 2018 годы.

© В.В. Матросов, К.Н. Алешин, 2014
© Нижегородский госуниверситет
им. Н.И. Лобачевского, 2014

Содержание

Введение	4
1 Базовые математические модели цепочек	5
1.1 Параллельное соединение	5
1.2 Каскадное соединение	7
2 Динамика базового элемента	9
2.1 Случай идеализированного фильтра	9
2.2 Случай интегрирующего фильтра	11
2.3 Случай пропорционально-интегрирующего фильтра	13
3 Динамические режимы ансамблей	15
4 Динамика цепочки параллельно связанных СФС без фильтров	17
4.1 Режимы синхронизации	17
4.2 Асинхронные режимы	23
4.2.1 Ансамбль из двух элементов	23
4.2.2 Ансамбль из трех элементов	26
4.2.3 Особенности динамики парциального элемента цепочки произвольной длины	29
4.3 Подавление колебаний «вниз по потоку»	31
4.4 Построение карт динамических режимов	34
5 Динамика цепочки с фильтром первого порядка в цепи управления	37
5.1 Режим синхронизации	38
5.2 Асинхронные режимы	38
5.2.1 Динамика модели (4) в случае $N = 2$	38
5.2.2 Особенности динамики ансамблей с числом элементов $n > 2$	40
6 Динамика цепочки каскадно связанных СФС с идеализированными фильтрами	41
6.1 Синхронные режимы	42
6.2 Асинхронные режимы	43
6.2.1 Ансамбль из двух элементов	43
6.2.2 Ансамбль из трех элементов	44
Заключение	48
Литература	50

Введение

Роль ансамблей связанных фазовых систем, как моделей реальных явлений природы, довольно трудно переоценить. Область применения таких моделей охватывает многие разделы современной науки, начиная с классической механики и расширяясь на наименее формализованные проблемы социальных явлений и некоторые вопросы психологии. Вообще говоря, любой природный феномен, обладающий свойством периодичности во времени или пространстве можно описать с помощью математического аппарата, в основе которого лежит понятие фазы. Многие разделы современной радиофизики опираются на теоретический аппарат фазовых систем. Например, динамика фундаментального элемента классической механики – гармонического осциллятора, может быть элегантно описана в терминах амплитуды и фазы, а некоторые сложные нелинейные системы, близкие к гармоническому осциллятору, точное решение которых не удается найти в пространстве элементарных функций, получают математическое описание на основе асимптотических методов как фазовые системы. Часто математический аппарат нелинейной динамики фазовых систем применяется к изучению человека. Периодичность сердечных ритмов, суточной активности, локомоций и нервной деятельности позволяет конструктивно формализовать многие аспекты нашей жизнедеятельности. Формализация этих аспектов выводит понимание устройства внутренних органов и методов их регуляции на принципиально новый качественный уровень. Например, процесс формирования речевых гласных звуков довольно точно может описан как динамическая система и на основе данных, полученных в натурном эксперименте, становится доступной методика диагностики и коррекции дефектов речи [1]. Отдельного упоминания достойны системы прецизионной измерительной аппаратуры и эталоны частоты и времени, без которых немыслима постановка современных экспериментов и проведение измерений в рамках космологии, астрономии, квантовой физики, а также невозможно адекватное использование спутниковых систем навигации (GLONASS, GPS). Среди базовых элементов таких приборов отметим блоки автоподстройки частоты (АПЧ), которые сегодня можно найти и в каждом радиоприёмнике или телевизионной антенне. Математические модели ансамблей связанных систем фазовой синхронизации представляют существенный интерес при изучении динамики различных многоэлементных осцилляторных систем из приложений, таких, например, как фазированные антенные решетки, каскады эталонов частоты, сети связи, энергосети [2,3] и др. В последнее время интерес к этой тематике заметно возрос в связи с появлением новых задач когерентного сложения мощностей [4–6], исследования нейронных сетей [7], ансамблей фазовых осцилляторов Курамото [8], моделей социоэкономической динамики [9]. Активный интерес исследователей к анализу ансамблей систем фазовой синхронизации

связан, с одной стороны, со сравнительно простой динамикой индивидуального элемента ансамбля, а, с другой, с возможностью объединения таких элементов в сети с различной конфигурацией с целью достижения прогресса в изучении особенностей коллективной динамики осцилляторных сетей (возникновение сложной, в том числе хаотической, динамики образование и законы эволюции структур и т.д.). Исследованию коллективной динамики связанных фазовых систем (систем фазовой синхронизации) посвящен ряд работ [2–4, 8, 9]. В основном эти исследования касаются вопросов существования устойчивых режимов синхронизации в элементах цепочечных и решеточных ансамблей, а также вопросов возникновения и развития регулярных и хаотических асинхронных режимов при нарушении синхронизации. Следует отметить, что в этих работах в силу существенных трудностей исследования многомерных нелинейных моделей осцилляторных ансамблей произвольной конфигурации, исследованию подвергаются упрощенные модели, предполагающие цепочечную и решеточную конфигурации ансамбля и, как правило, однородность элементов ансамбля. Еще большего упрощения можно достичь, переходя к моделям малых ансамблей осцилляторов, то есть к моделям ансамблей с малым числом элементов. Такие модели представляют как самостоятельный интерес, так и как предельный случай больших ансамблей. Заметим, что многие свойства коллективной динамики больших ансамблей начинают проявляться в ансамблях малой размерности. Исследования малых ансамблей методами нелинейной динамики в сочетании с компьютерным моделированием позволяют получить достаточно полное описание коллективной динамики таких ансамблей. Анализ имеющихся публикаций показывает, что, несмотря на привлекательность моделей малых ансамблей для исследования, динамика таких систем изучена в литературе сравнительно слабо. В этой связи в настоящей работе акцент сделан именно на исследовании динамики малых ансамблей.

1 Базовые математические модели цепочек

1.1 Параллельное соединение

Рассмотрим многоканальную систему, содержащую цепочку парциальных систем фазовой синхронизации (СФС), соединенных параллельно (рис. 1) так, что для управления генератором Γ_n в n -ой парциальной СФС_n используется не только сигнал с выхода дискриминатора $\Phi\Delta_n$, но и сигнал с выхода $\Phi\Delta_{n-1}$, т.е. связи парциальных СФС_n являются независимыми, односторонними, и цепочка обладает свойствами цепочки потокового типа [3, 10–12].

Математическая модель такой потоковой цепочки СФС это система операторных

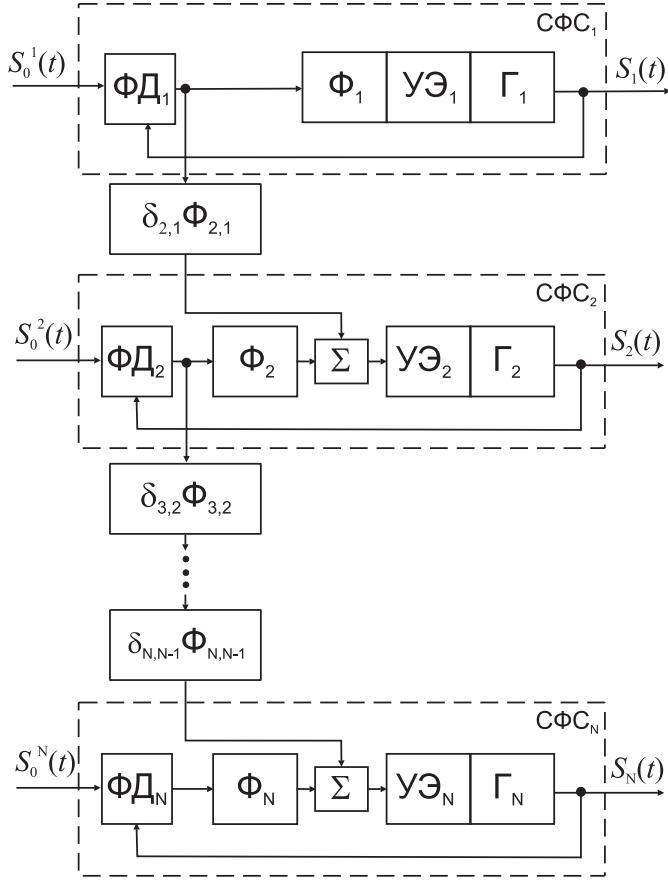


Рис. 1: Параллельное соединение СФС

уравнений

$$\begin{aligned} \frac{p\varphi_n}{\Omega_n} + K_n(p)F_n(\varphi_n) + \\ + \delta_{n,n-1}K_{n,n-1}(p)F_{n-1}(\varphi_{n-1}) = \gamma_n, \quad n = 1, N, \end{aligned} \quad (1)$$

где $p \equiv d/dt$ – оператор дифференцирования, $\varphi_n(t) = \theta_n(t) - \theta_0^n(t)$ – текущее фазовое рассогласование между сигналом $S_n(t)$ управляемого генератора Γ_n и опорным сигналом $S_0^n(t)$, Ω_n – максимальная расстройка по частоте, которую может скомпенсировать цепь управления СФС_n , $K_n(p)$ и $K_{n,n-1}(p)$ – коэффициенты передачи фильтров Φ_n и $\Phi_{n,n-1}$ в операторной форме, $F_n(\varphi)$ – нормированная характеристика фазового дискриминатора Φ_D_n , $\gamma_n = \Omega_H^n/\Omega_n$, Ω_H^n – начальная частотная расстройка колебаний СФС_n , $\delta_{n,n-1}$ – параметр дополнительной связи по цепям управления между СФС_n и СФС_{n-1} . Заметим, что положительные значения параметра δ соответствуют кооперативным связям элементов цепочки, а отрицательные – антагонистическим.

Для упрощения анализа будем считать цепочку однородной, т.е. для любого n выполняется $\theta_0^n(t) = \theta_0(t)$, $\delta_{n,n-1} = \delta$, $F_n(\varphi) = F(\varphi)$, $K_{n,n-1}(p) = K_n(p) = K(p)$, $\gamma = \gamma_n$, $\Omega_n = \Omega$. Тогда (1) принимает вид [3]

$$\frac{p\varphi_n}{\Omega} + K(p)F(\varphi_n) = \gamma - \delta K(p)F(\varphi_{n-1}), \quad n = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Подставляя в уравнения (2) конкретные выражения для коэффициентов передачи фильтров и характеристик фазовых дискриминаторов можно получить разнообразные математические модели цепочки в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы ограничимся рассмотрением моделей, которые получаются из уравнения (2) при $F(\varphi_n) = \sin \varphi_n$, когда в цепях управления и каналах связи фильтры либо отсутствуют, либо одинаковые первого порядка. Тогда

- в случае фильтров первого порядка с коэффициентами передачи $K(p) = (1 + Tp)^{-1}$ (T -постоянная времени фильтра), имеем систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, \\ \varepsilon \frac{dy_1}{d\tau} &= (\gamma - \sin \varphi_1 - y_1), \\ \frac{d\varphi_n}{d\tau} &= y_n, \\ \varepsilon \frac{dy_n}{d\tau} &= (\gamma - \sin \varphi_n - y_n - \delta \sin \varphi_{n-1}), \quad n = \overline{2, N}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\tau = \Omega t$ – безразмерное время, $\varepsilon = \Omega T$ – безразмерный параметр фильтра;

- в случае, когда фильтры отсутствуют ($K(p) = 1$), имеем систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi_1, \\ \frac{d\varphi_n}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi_n - \delta \sin \varphi_{n-1}, \quad n = \overline{2, N}. \end{aligned} \tag{4}$$

Модели (3), (4) составляют базу математических моделей, на которой строятся исследования динамики цепочки параллельно связанных СФС.

1.2 Каскадное соединение

При каскадном объединении СФС в ансамбль генераторы соединены таким образом, что выходной сигнал предыдущего элемента является входным последующего. На рис.2 представлена структурная схема каскадного соединения СФС. Здесь внешним

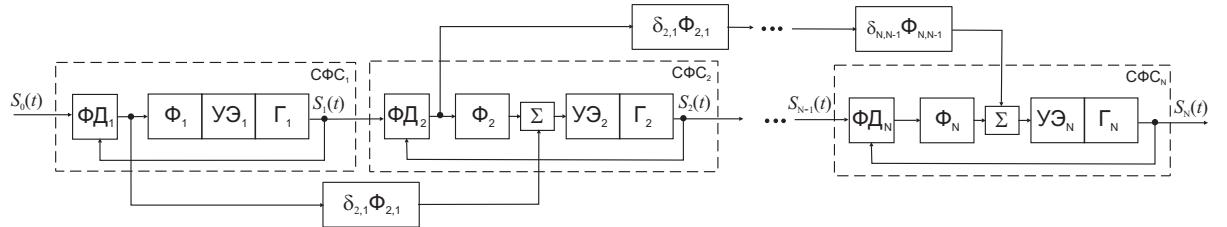


Рис. 2: Каскадное соединение СФС

сигналом является опорный сигнал $S_0(t)$, который поступает на вход СФС₁, сигнал

$S_1(t)$ с выхода СФС_1 является входным для СФС_2 , сигнал $S_2(t)$ с выхода СФС_2 является входным для СФС_3 и т.д. При каскадном объединении парциальные элементы могут обмениваться информацией о возникающих в них сигналах ошибок через дополнительные каналы. Мы рассмотрим цепочку с дополнительными связями «вперед», когда информация с выхода фазового дискриминатора $\Phi\Delta_{n-1}$ передается в локальную цепь управления СФС_n . Сигналы в дополнительных цепях управления могут преобразовываться – усиливаться или ослабляться, проходить через дополнительные фильтры $\Phi_{n,n-1}$.

Уравнения, описывающие динамические процессы в рассматриваемой каскадной системе, составляются из общих уравнений взаимосвязанных систем синхронизации, введенных в [2]

$$\begin{aligned} \frac{p\varphi_1}{\Omega_1} &= \gamma_1 - K_1(p)F_1(\varphi_1), \\ \frac{p\varphi_n}{\Omega_n} &= \gamma_n - K_n(p)F_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \delta_{n,n-1}K_{n,n-1}(p)F_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}), \quad n = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi_n(t) = \theta_n(t) - \theta_0(t)$ – текущее фазовое рассогласование между сигналом $S_n(t)$ управляемого генератора Γ_n и опорным сигналом $S_0(t)$, Ω_n – максимальная расстройка по частоте, которую может скомпенсировать цепь управления СФС_n , $K_n(p)$ и $K_{n,n-1}(p)$ – коэффициенты передачи фильтров Φ_n и $\Phi_{n,n-1}$ в операторной форме, $F_n(\varphi)$ – нормированная характеристика фазового дискриминатора $\Phi\Delta_n$, $\gamma_n = \Omega_n^n/\Omega_n$, Ω_n^n – начальная частотная расстройка колебаний СФС_n , $\delta_{n,n-1}$ – параметр дополнительной связи по цепям управления между СФС_n и СФС_{n-1} .

В случае однородной цепочки, когда $K_{n,n-1}(p) = K_n(p) = K(p)$, $\Omega_n = \Omega$, $\gamma = \gamma_n$, $\delta_{n,n-1} = \delta$, $F_n(\varphi) = F(\varphi)$, система (5) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{p\varphi_1}{\Omega} &= \gamma - K(p)F(\varphi_1), \\ \frac{p\varphi_n}{\Omega} &= \gamma - K(p)[F(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \delta F(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})], \quad n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (6)$$

Переходя в модели (6) к безразмерному времени $\tau = \Omega t$ и синусоидальной характеристике фазовых дискриминаторов $F(\cdot) = \sin(\cdot)$, получаем следующие динамические системы:

- для цепей с интегрирующими фильтрами, $K(p) = (1 + Tp)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1 \\ \varepsilon \frac{dy_1}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi_1 - y_1, \\ \frac{d\varphi_n}{d\tau} &= y_n \\ \varepsilon \frac{dy_n}{d\tau} &= \gamma - \sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - y_n - \delta \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}), \quad n = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (7)$$

- для цепей с идеализированными фильтрами, $K(p) = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi_1, \\ \frac{d\varphi_n}{d\tau} &= \gamma - \sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \delta \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}), \quad n = \overline{2, N}.\end{aligned}\tag{8}$$

Модели (7), (8) составляют базу математических моделей, на которой строятся исследования динамики цепочки каскадно связанных СФС.

Модели (3) и (7) определены в $2N$ -мерных цилиндрических фазовых пространствах $U_N = \{\varphi_n(\text{mod}2\pi), y_n\}, n = \overline{1, N}$, а модели (4) и (8) заданы на N -мерных фазовых торах $T_N = \{\varphi_n(\text{mod}2\pi)\}$. Системы (4) и (8) инвариантны относительно замены $(\gamma, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \rightarrow (-\gamma, -\varphi_1, -\varphi_2, \dots, -\varphi_N)$, а модели (3) и (7) – относительно замены $(\gamma, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, y_1, y_2, \dots, y_N) \rightarrow (-\gamma, -\varphi_1, -\varphi_2, \dots, -\varphi_N, -y_1, -y_2, \dots, -y_N)$, поэтому динамику этих моделей достаточно рассмотреть при $\gamma \geq 0$. Далее остановимся на динамике базового элемента рассматриваемых цепочек [9].

2 Динамика базового элемента

Математическая модель базового элемента (модель СФС) может быть представлена следующим уравнением [13, 14]:

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)F(\varphi) = \gamma,\tag{9}$$

где $p \equiv d/dt$ – оператор дифференцирования, Ω – максимальная расстройка по частоте, которую может скомпенсировать цепь управления, $\gamma = \Omega_H/\Omega$, Ω_H – начальная частотная расстройка колебаний, $K(p)$ – коэффициент передачи фильтра в операторной форме, $F(\varphi)$ – нормированная характеристика фазового дискриминатора. Нелинейные свойства уравнения (9) определяются нелинейной характеристикой фазового дискриминатора, а инерционные зависят от фильтра в цепи управления, который подбирается, исходя из обеспечения желаемых свойств динамических процессов. Для любого конкретного фильтра с коэффициентом передачи $K(p)$ от символической записи модели (9) можно перейти к модели СФС в форме конкретного дифференциального уравнения, порядок которого определяется типом фильтра $K(p)$. Таким образом, описать динамику системы СФС в рамках одного дифференциального уравнения невозможно, необходим комплекс таких моделей.

2.1 Случай идеализированного фильтра

Рассмотрим динамику модели (9) в простейшем случае идеализированного фильтра $K(p) = 1$. Вводя безразмерное время $\tau = t\Omega$, получаем из (9) дифференциальное

уравнение первого порядка

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi. \quad (10)$$

На рис. 3 представлены разбиение пространства параметров (здесь оно вырожденное, одномерное) уравнения (10) на две области ($0 \leq \gamma < 1$, $\gamma > 1$) и соответствующие фазовые портреты. Уравнение (10) рассматривается на фазовой окружности.

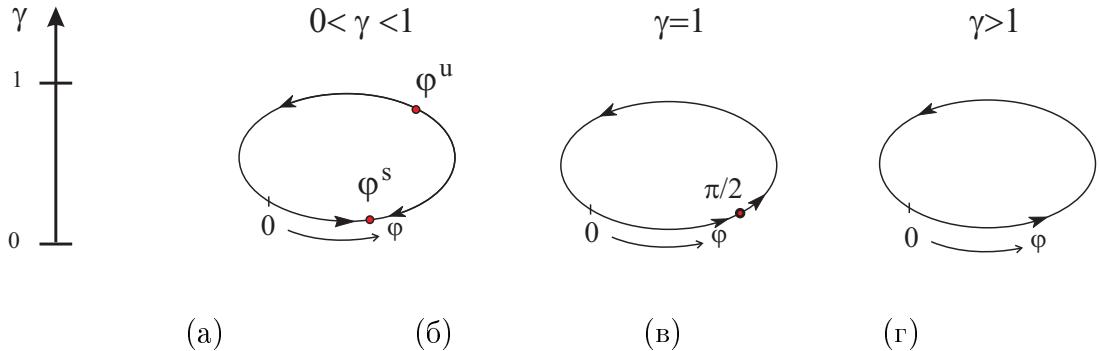


Рис. 3: Параметрический (а) и фазовые (б,в,г) портреты модели (10)

Для $0 \leq \gamma < 1$ имеем два состояния равновесия: устойчивое с координатой $\varphi^s = \arcsin \gamma$ и неустойчивое $\varphi^u = \pi - \arcsin \gamma$. При $\gamma = 1$ имеет место бифуркация слияния состояний равновесия в точке с координатой $\varphi = \pi/2$. В области $\gamma > 1$ состояний равновесия нет. Аналогичная картина имеет место и для $\gamma < 0$ в силу симметрии уравнения (10) относительно значения $\gamma = 0$. Полученные фазовые портреты позволяют построить зависимость установившейся частотной расстройки $(d\varphi/d\tau)_0$ от начальной расстройки γ (рис. 4), показывающую, что при квазистатическом, медленном увели-

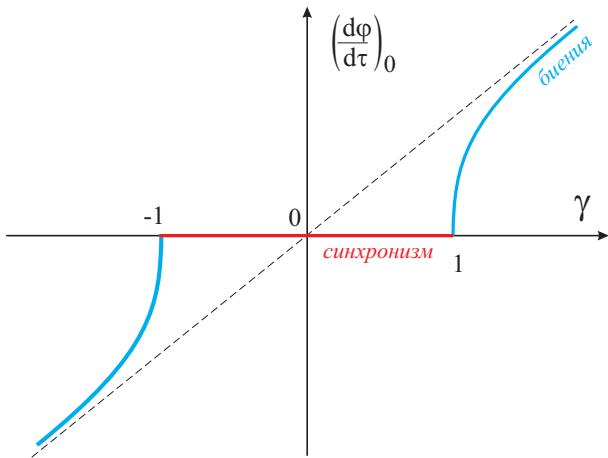


Рис. 4: Зависимость установившейся частотной расстройки от начальной для модели (10)

чении начальной расстройки γ от нуля вплоть до 1 имеет место синхронный режим с нулевой ошибкой синхронизации. При $\gamma = 1$ имеет место бифуркация слияния

устойчивого и неустойчивого состояний равновесия, происходит срыв синхронного режима и установление режима биений (кривая для $\gamma > 1$ дана условно). При медленном уменьшении γ вхождение в режим синхронизма и исчезновение асинхронного режима биений происходит при том же значении $\gamma = 1$. Расстройку $\gamma = 1$ обычно называют «полосой синхронизации».

2.2 Случай интегрирующего фильтра

Обратимся к исследованию системы фазовой синхронизации с инерционными цепями управления. Такие СФС, естественно, обладают более сложной динамикой. Основное внимание обратим на случай типового интегрирующего и пропорционально-интегрирующего фильтров в цепях управления СФС.

Рассмотрим случай наличия в ФАП интегрирующего RC -фильтра $K(p) = (1 + Tp)^{-1}$. В этом случае уравнение (9) после введения безразмерного времени $\tau_1 = t\sqrt{\Omega/T}$ принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau_1^2} + \lambda \frac{d\varphi}{d\tau_1} + \sin \varphi = \gamma. \quad (11)$$

Здесь введен параметр $\lambda = 1/\sqrt{\Omega T}$. Наряду с параметром λ здесь и далее будет употребляться параметр $\varepsilon = \Omega T = \lambda^{-2}$. Уравнение (11) можно переписать в виде системы

$$\frac{d\varphi}{d\tau_1} = y, \quad \frac{dy}{d\tau_1} = \gamma - \lambda y - \sin \varphi. \quad (12)$$

или

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \quad \varepsilon \frac{dy}{d\tau} = \gamma - y - \sin \varphi.$$

Система (12) хорошо изучена в нелинейной теории колебаний [15]. На рис. 5а дано разбиение плоскости параметров на области D_1, D_2, D_3 , соответствующие различным режимам работы. Расположение фазовых траекторий на фазовой поверхности (φ, y) для значений параметров, удовлетворяющих областям D_1, D_2, D_3 , представлено на рис. 5б,в,г соответственно. На фазовом цилиндре при $\gamma < 1$ есть два состояния равновесия с координатами $\varphi^s = \arcsin \gamma, y^s = 0$ и $\varphi^u = \pi - \arcsin \gamma, y^u = 0$. Для параметров, принадлежащих области D_1 , при любых начальных условиях на фазовом цилиндре изображающая точка с ростом времени приходит в устойчивое состояние равновесия $O_1(\varphi^s, y^s)$ (за исключением сепаратрис S_2, S_4 , входящих в седло $O_2(\varphi^u, y^u)$). Для параметров, принадлежащих области D_2 , в зависимости от начальных условий изображающая точка на поверхности (φ, y) с ростом времени либо стремится к устойчивому состоянию равновесия, либо к устойчивому предельному циклу (рис. 5в). Области D_1 и D_2 разделяет кривая $\gamma = \gamma^*(\varepsilon)$. Значения параметров, удовлетворяющие кривой $\gamma^*(\varepsilon)$, являются бифуркационными, соответствующими петле сепаратрис седла

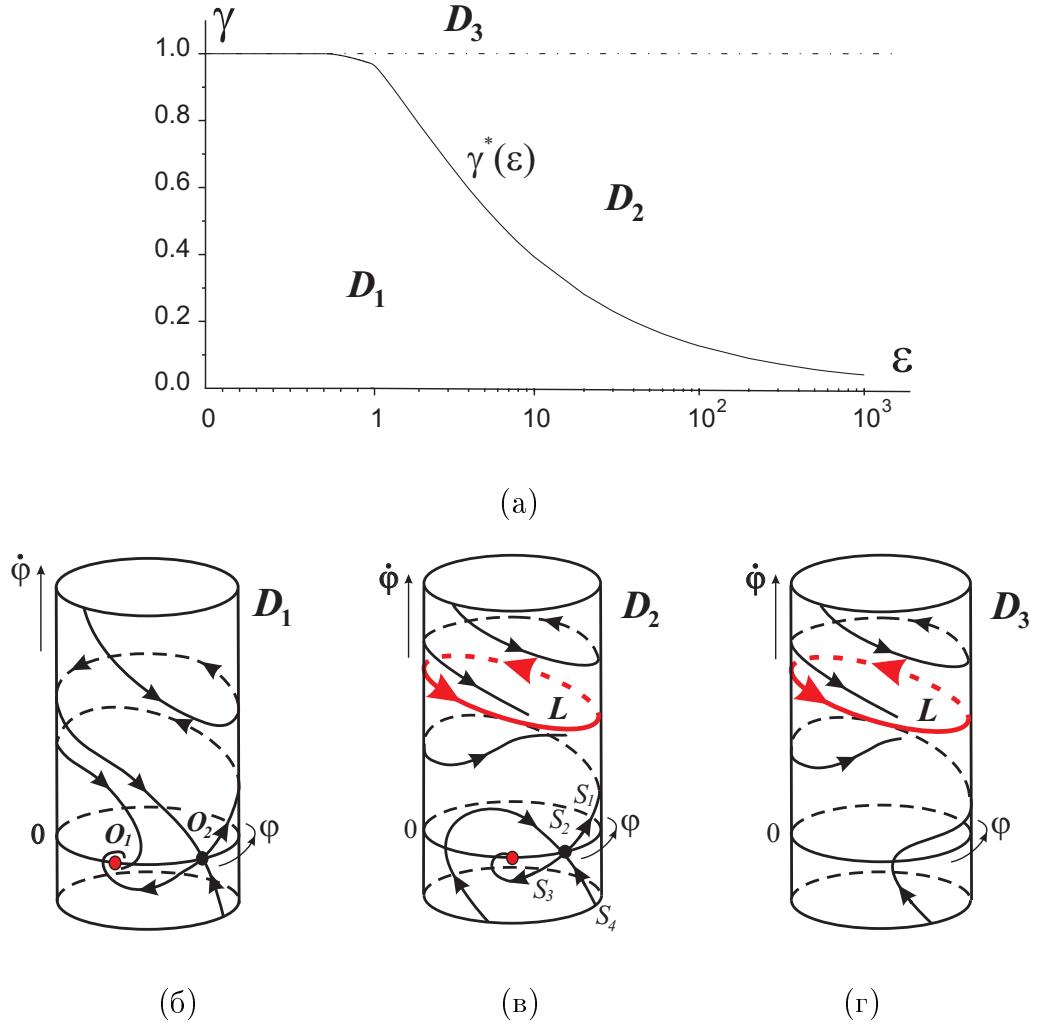


Рис. 5: Параметрический (а) и фазовые (б–г) портреты модели (12)

$O_2(\varphi^u, y^u)$, образующейся от слияния сепаратрис S_1 и S_2 . Прямая $\gamma = 1$ на плоскости (γ, ε) также является бифуркационной, соответствующей образованию седло-узла от слияния устойчивого O_1 и неустойчивого O_2 состояний равновесия. Часть кривой $\gamma = 1$, прилегающей к оси $\varepsilon = 0$, отвечает бифуркации петли сепаратрис седло-узла.

Таким образом, область D_1 является областью параметров, для которых в системе при любых начальных условиях устанавливается режим синхронизма. Границу этой области образуют прямая $\gamma = 1$ и кривая $\gamma = \gamma^*(\varepsilon)$. Очевидно, что для приложений важно знать достаточно точно расположение кривой $\gamma^*(\varepsilon)$ на плоскости (ε, γ) . Многие авторы, начиная с Трикоми, исследовавшие уравнение маятника (11), предлагали различные приближенные построения кривой $\gamma = \gamma^*(\varepsilon)$ [14, 16]. Сейчас более естественно использовать для этого ЭВМ.

Результаты анализа параметрических и фазовых портретов (рис. 5) позволяют построить зависимость установившейся частотной расстройки y_0 от начальной расстройки γ . Эта зависимость представлена на рис. 6. Она показывает, что при мед-

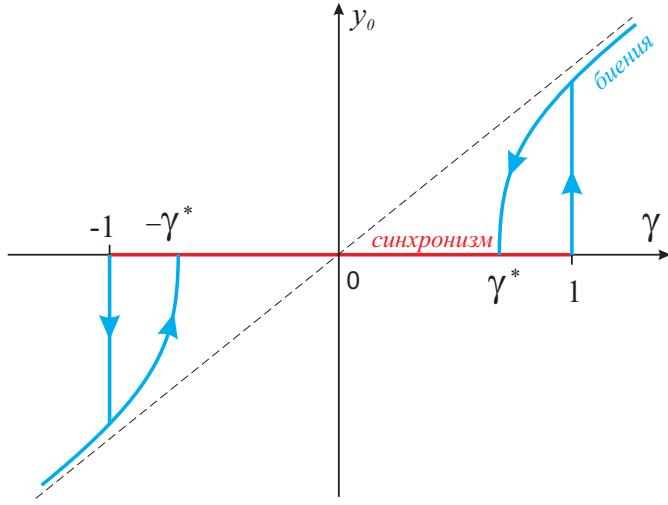


Рис. 6: Зависимость установившейся частотной расстройки от начальной для модели (12)

ленном, квазистатическом увеличении начальной расстройки γ от нуля до единицы имеет место режим синхронизма с нулевой установившейся разностью частот. При достижении $\gamma = 1$ происходит срыв синхронного режима, и устанавливается режим биений (кривая для $\gamma > 1$ дана условно). Расстройку $\gamma = 1$ называют полосой синхронизма. При уменьшении начальной расстройки γ захват в режим синхронизма происходит при значении $\gamma = \gamma^* < 1$. Этую расстройку называют полосой захвата $\gamma_{\text{захв}}$. В рассматриваемом случае полоса захвата определяется бифуркацией петли сепаратрисы седла $\gamma_{\text{захв}} = \gamma^*$. Фактически имеет место гистерезисная ситуация ($\gamma_{\text{захв}} < \gamma_{\text{синхр}} = 1$), иллюстрируемая графиком рис. 6 (вне полосы захвата в режиме биений кривая $y_0(\gamma)$ дана условно).

Таким образом, введение RC -фильтра в цепь управления системы ФАП привело к уменьшению полосы частот, обеспечивающей гарантированно установление режима синхронизма при любых начальных условиях, то есть привело к наличию гистерезиса ($\gamma_{\text{захв}} < \gamma_{\text{синхр}} = 1$). Следует ожидать, что применение в кольце ФАП более сложных фильтров, чем интегрирующий, может привести к такому усложнению динамики, при котором полоса захвата будет определяться не только бифуркацией петли сепаратрис седла, но и другими, более сложными, бифуркациями, например, связанными с рождением предельных циклов из сгущения траекторий. Рассмотрим далее именно такой случай.

2.3 Случай пропорционально-интегрирующего фильтра

Рассмотрим случай пропорционально-интегрирующего фильтра $K(p) = (1 + nTp)/(1 + Tp)$ в цепи управления. Такой фильтр является одним из наиболее употребляемых

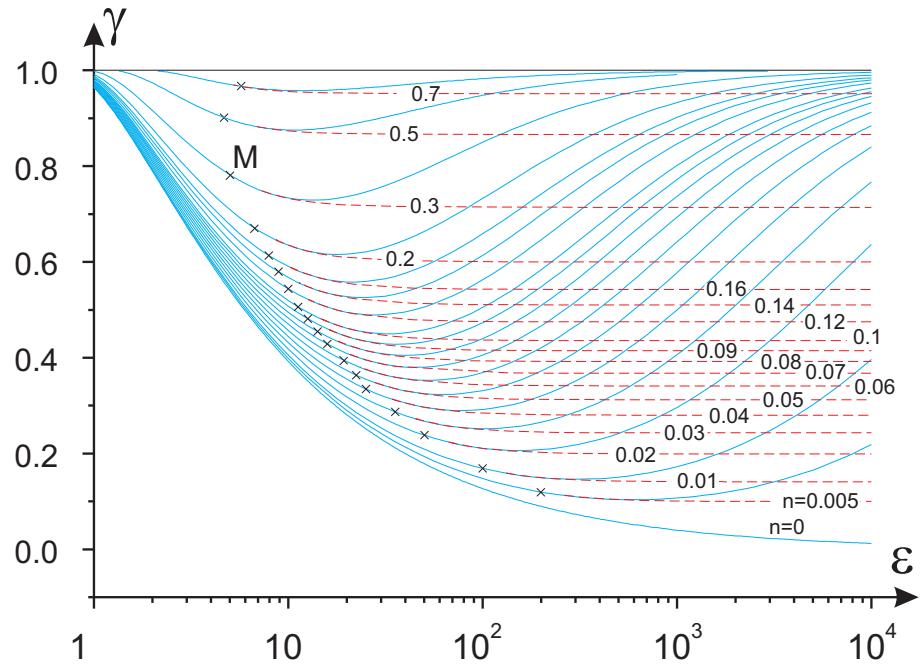


Рис. 7: Графики полосы захвата системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром

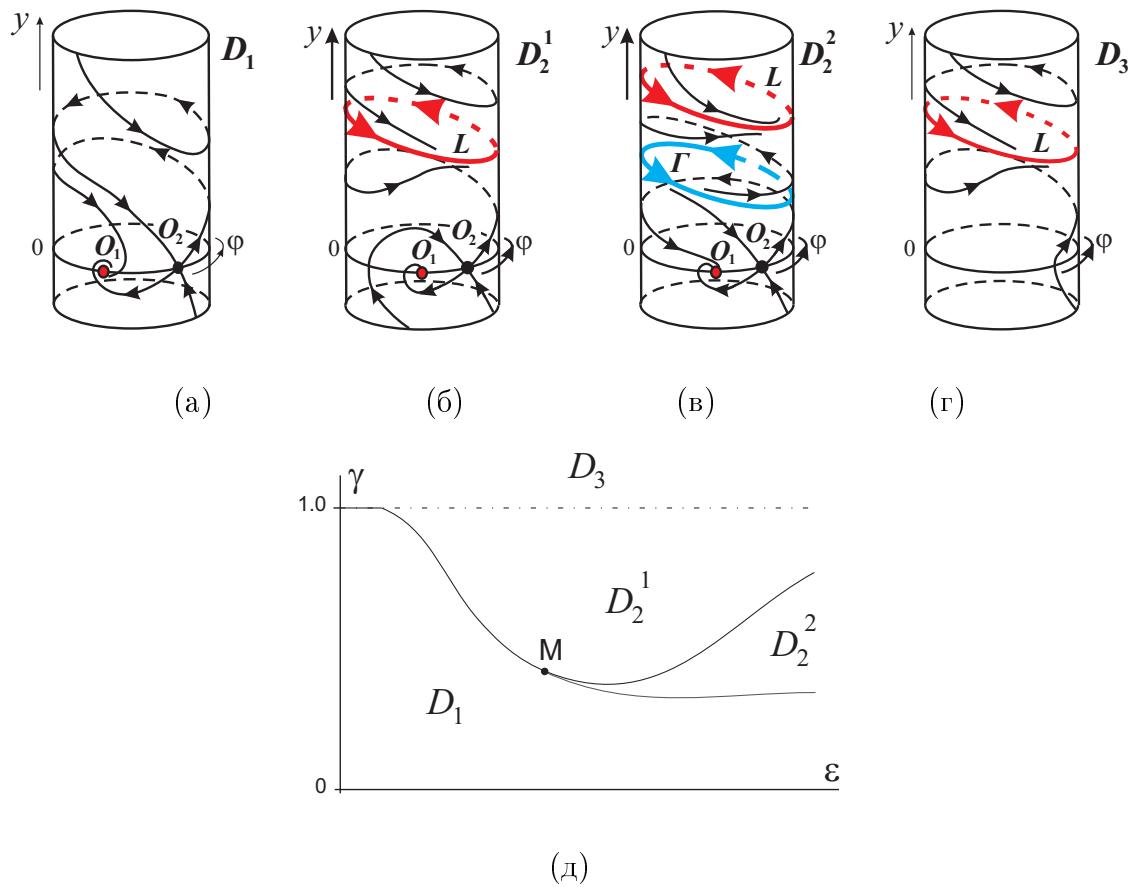


Рис. 8: Фазовые портреты (а–г) и параметрический портрет (д) для модели (13). L – устойчивый цикл, Γ – неустойчивый цикл

на практике. В этом случае уравнение (9) можно записать в виде

$$\frac{d\varphi}{d\tau_1} = y, \quad \frac{dy}{d\tau_1} = \gamma - \left(\lambda + \frac{n}{\lambda} \cos \varphi \right) y - \sin \varphi, \quad (13)$$

где $\tau_1 = t\sqrt{\Omega/T}$, $\lambda = 1/\sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon = \Omega T$, $0 \leq n < 1$. Динамику (13) характеризует возможность появления асинхронных вращательных периодических движений не только через бифуркацию петли сепаратрисы седла, как это имело место в системе (12), но и через бифуркацию двойного цикла [17]. На рис. 7 сплошной линией даны бифуркационные кривые, соответствующие петле сепаратрисы седла, а штриховыми – соответствующие двойному циклу [18].

Для каждого $n=n_0$ пересечение бифуркационных кривых (точки пересечения M отмечены крестиками) происходит при значениях $\varepsilon=\varepsilon_0$, определяемых уравнением

$$\frac{1}{\varepsilon} - n_0 \sqrt{1 - \gamma^2} = 0. \quad (14)$$

Условие (14) является условием обращения в ноль седловой величины седла $O_2(\varphi^u, 0)$, что соответствует слиянию двойного цикла с петлей сепаратрисы седла. При $\varepsilon < \varepsilon_0$ (слева от точки M) петля сепаратрисы устойчива, а при $\varepsilon > \varepsilon_0$ (справа от точки M) – неустойчива.

Таким образом, полоса захвата $\gamma = \gamma^*(\varepsilon, n)$ ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром для значений $\varepsilon < \varepsilon_0$ определяется частью бифуркационной кривой, соответствующей петле сепаратрисы седла, а для значений $\varepsilon > \varepsilon_0$ – бифуркационной кривой, соответствующей двойному циклу. Бифуркационные кривые рис. 7 (вместе с бифуркационной прямой $\gamma = 1$, соответствующей слиянию устойчивого и неустойчивого состояний равновесия) делят пространство параметров (ε, γ, n) на области D_1, D_2, D_3 (рис. 8д). Фазовые портреты для этих областей представлены на рис. 8а–г. В области D_1 при любых начальных условиях устанавливается режим синхронизации (рис. 8а). В области D_3 всегда устанавливается асинхронный вращательный периодический режим (рис. 8г), в области D_2 возможно установление либо режима синхронизации, либо асинхронного периодического режима вращений в зависимости от начальных условий (возможные фазовые портреты даны на рис. 8б для подобласти D_2^1 и на рис. 8в для подобласти D_2^2).

3 Динамические режимы ансамблей

В теории колебаний конечная цель исследования любой динамической системы это разбиение пространства параметров на области, соответствующие различным режимам работы [15]. Для ансамблей состоящих из большого числа элементов, построение полного разбиения, сводится к изучению фазовых траекторий в многомерном фазовом пространстве и является практически не разрешимой задачей в силу большого

разнообразия этих траекторий. Взгляд на цепочку с позиций поведения парциальных СФС_{*n*} позволяет сформировать качественное представление о поведении цепочки.

Парциальный элемент рассматриваемой цепочки может функционировать в следующих режимах [9, 19, 20]. *Режим синхронизма* генератора Γ опорным сигналом, при котором частоты опорного и подстраиваемого генераторов равны, а медленные изменения параметров, определяющих эти частоты, практически полностью компенсируются действием системы автоподстройки. *Режим квазисинхронизма*, при котором частоты опорного и подстраиваемого генераторов равны в среднем. В этом режиме на выходе СФС имеют место колебания с угловой модуляцией, средняя частота которых стабилизирована частотой опорного сигнала. *Режим биений*, если среднее значение разности частот не равно нулю, а разность фаз подстраиваемого и опорного сигналов неограниченно нарастает. В этом режиме на выходе СФС имеют место колебания с угловой модуляцией, но в этом режиме средняя частота модулированных колебаний не совпадает с частотой опорного сигнала. В фазовом пространстве парциальной системы синхронному режиму соответствует точка, квазисинхронному режиму и режиму биений – траектории соответственно, ограниченные и неограниченные по переменной φ .

Рассматривая динамику ансамбля, как совокупность элементов с индивидуальной динамикой, можно выделить [3] режим *глобальной синхронизации*, когда все парциальные системы находятся в синхронном режиме; режим *частичной синхронизации* – в синхронном режиме находятся лишь часть генераторов, при этом режим частичной синхронизации, может быть разделен на режимы частичной синхронизации с более тонкой структурой, например, учитывающих число генераторов функционирующих в синхронном режиме, а также распределение этих генераторов по пространству. Поскольку, в режиме частичной синхронизации, элементы ансамбля находятся как в синхронном, так и в асинхронном режимах, тот эти режимы могут быть рассмотрены с позиции асинхронных режимов [21], т.е. характеризоваться количеством элементов цепочки функционирующих, например, в квазисинхронном режиме (режим *частичной квазисинхронизации*). При отсутствии генераторов, функционирующих в синхронном режиме, на первый план выходит анализ числа и распределения по пространству генераторов, функционирующих в квазисинхронном режиме, при этом представляет интерес разделение колебаний на регулярные и хаотические, а также трансформация колебаний при движении по пространству от одного элемента цепочки к другому.

4 Динамика цепочки параллельно связанных СФС без фильтров

В данном разделе представлены результаты изучения динамики модели цепочки параллельно связанных СФС. Рассмотрена наиболее простая однородная цепочка СФС с фильтрами первого порядка и идеализированными фильтрами в цепях управления, динамика которых описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений (3) и (4). Изучение осуществляется по следующей схеме. Сначала рассматриваются движения модели (4) – изучаются синхронные режимы цепочки, автоколебательные режимы малых ансамблей, особенности поведения парциального элемента цепочки произвольной длины. Далее обсуждаются движения модели (3), при этом основное внимание уделяется влиянию параметров фильтров цепей управления на динамические режимы ансамбля.

4.1 Режимы синхронизации

Исследование режимов глобальной синхронизации, сводится к изучению состояний равновесия модели (4) – поиску устойчивых состояний равновесия и выделение областей их существования в пространстве параметров.

На рис. 9 изображены области C_S^N существования состояний равновесия модели (4) в случаях $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. При значениях параметров внутри выделенных областей соответствующая цепочка глобально устойчива, т.е. все генераторы цепочки функционируют в синхронном режиме. Из рисунка видно, что с ростом N область существования режимов глобальной синхронизации уменьшается и при $N \rightarrow \infty$ область C_S^N вырождается в область C_S^∞ с границами (пунктирные линии): $\gamma_l^\infty = \delta - 1, -1 < \delta < 0; \gamma_t^\infty = 1, 0 < \delta < 1; 0 < \gamma < 1, \delta = 1$. При $|\gamma| > 1$ синхронные режимы отсутствуют. Заметим, что верхняя граница и нижняя граница C_S^N для нечетных $N > 2$ – гладкие кривые. Верхняя граница C_S^N для четных N имеет изломы в точках $a(\delta^*, \gamma^* = 1 - \delta^*)$, где δ^* есть решение уравнения $\delta^{N-1} - 2 \left[\sum_{i=0}^{N-2} (-\delta)^i \right] = 0, N = 4, 6, 8, \dots$. При этом сверху от точек a границы областей C_S^{N-1} и C_S^N совпадают.

Рисунок 9 дает представления о структуре областей существования режимов частичной квазисинхронизации. В модели (4) при $\gamma < 1$ первый элемент цепочки всегда находится в синхронном режиме, состояния других элементов зависят от значений параметров γ и δ . Для фиксированных значений γ и δ , используя выражение $|\gamma \left[\sum_{i=0}^{n^*-1} \delta(-1)^i \right]| < 1$, всегда можно найти n^* , определяющего элементы цепочки находящиеся в режиме синхронизма. Таким образом в цепочке существует режим частичной синхронизации, в котором элементы цепочки с номерами $n \leq n^*$ функ-

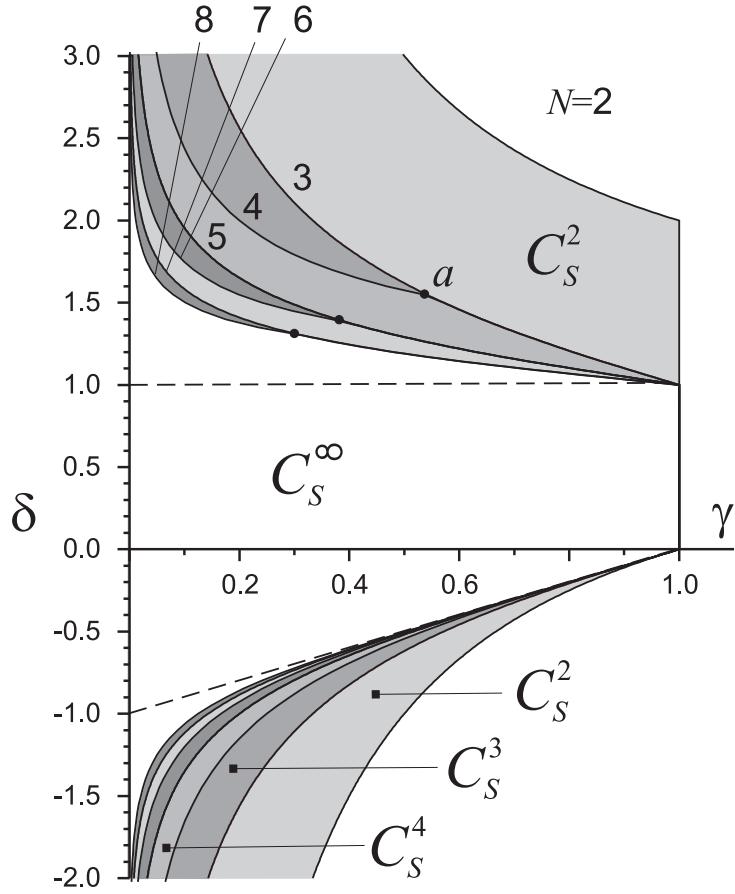


Рис. 9: Области C_S^N существования режимов глобальной синхронизации модели (4) для $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

ционируют в режиме синхронизма, а элементы с номерами $n > n^*$ – в асинхронных режимах.

Общее уравнение пересечения двух кривых потери устойчивости синхронного режима i -го и $(i-1)$ -го элементов совпадает с уравнением пересечения одной кривой с прямой $\gamma = \delta - 1$ и имеет вид полинома степени $N - 1$:

$$\delta^{N-1} - 2 \sum_{n=0}^N (-\delta)^n = 0, \quad (15)$$

где N – количество элементов в цепочке. В общем случае получить корни этого уравнения можно только из численного счёта, однако в частном случае, при $N = 4$, уравнение (15) можно решить методом Кардано. В результате получим два комплексно сопряжённых корня, которые в данном случае не представляют интереса, и один действительный $\delta = \delta^* \approx 1.53$, тогда значение второй координаты можно получить из уравнения прямой очень просто: $\gamma = 0.53$, что, очевидно, совпадает с координатами этой точки на рис. 9.

За исчезновением режима синхронизации можно следить не только при изменении

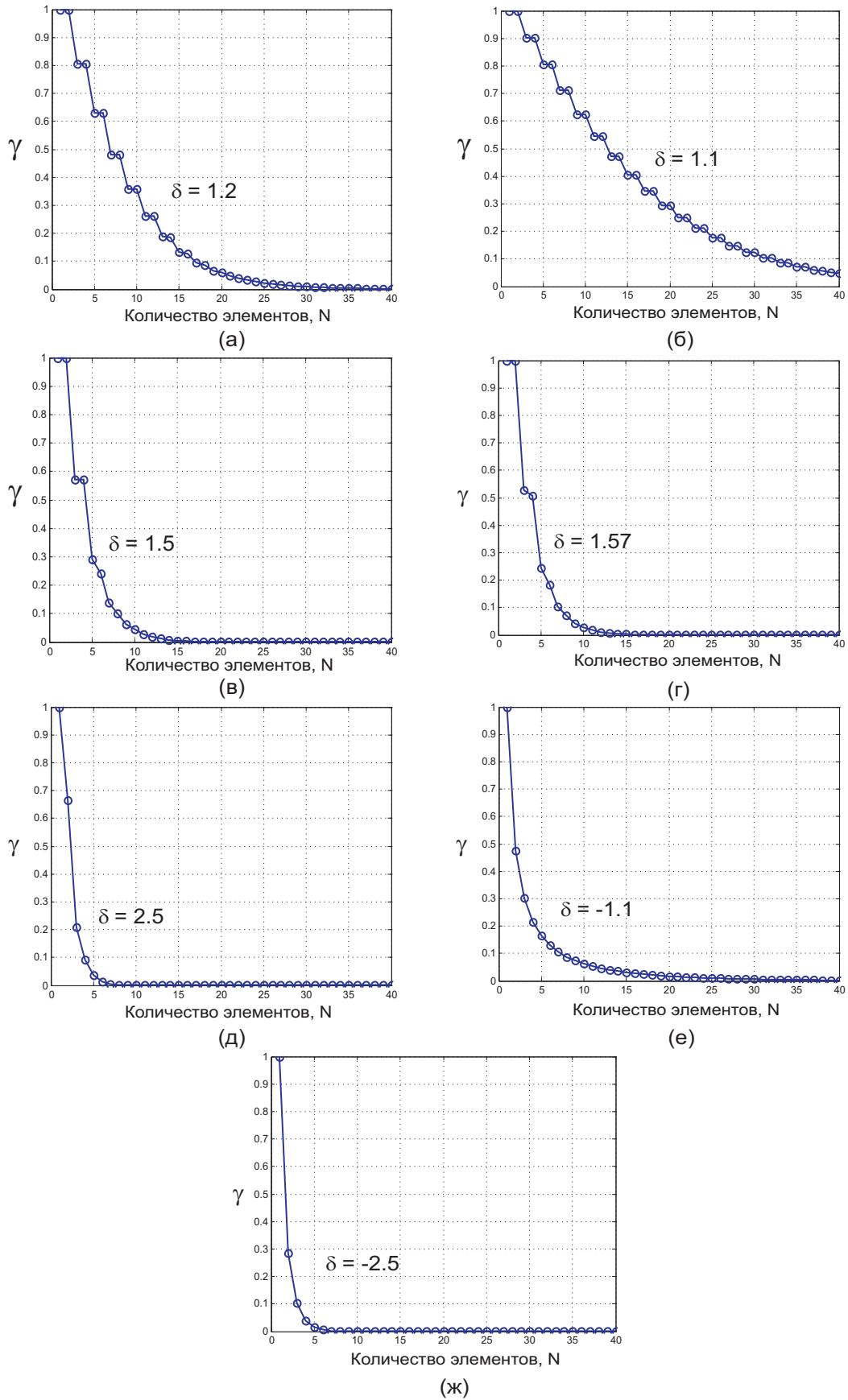


Рис. 10: Пространственная полоса синхронизации для модели (4) в проекции на плоскость (n^*, γ)

нии пространственной переменной n , но и параметров γ, δ . При фиксированном значении параметра связи δ , для любого номера n^* можно определить бифуркационное значение параметра $\gamma_s(n^*, \delta)$, соответствующее исчезновению режима синхронизации из соотношения

$$|\gamma \sum_{n=0}^N (-\delta)^n| = 1. \quad (16)$$

Диапазон величин $\gamma_s(n^*, \delta)$, определяемый условием (16), называют *пространственной полосой синхронизации* [3], поскольку для парциальных элементов с номерами $n = 1, 2, \dots, n^*$ обеспечивается достижение синхронизма в полосе начальных расстроек по частоте $0 < \gamma < \gamma_s(n^*, \delta)$. На рис. 10 представлены графики зависимости $\gamma = \gamma_s(n^*, \delta)$. Для удобства пользования графиками точки для дискретных значений n^* соединены прямыми.

На рис. 11 представлена пространственная полоса синхронизации для модели (4) в трехмерном пространстве (γ, δ, n) .

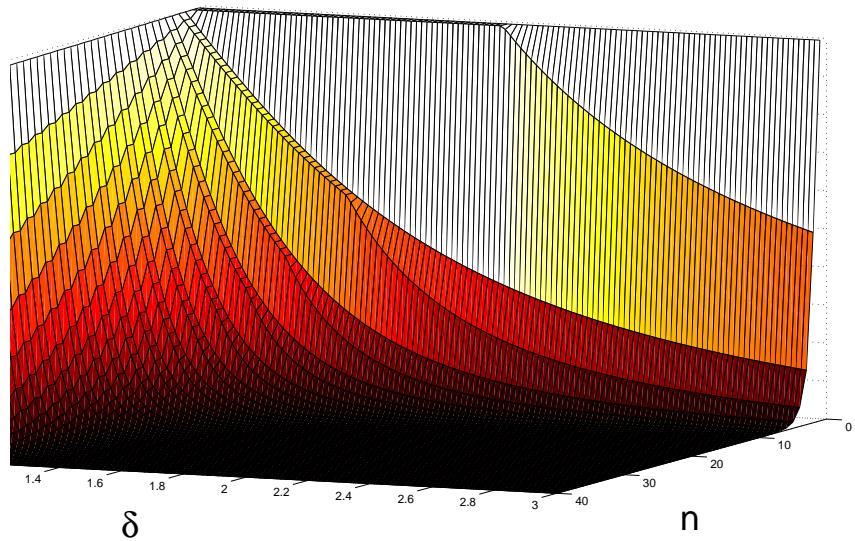


Рис. 11: Пространственная полоса синхронизации для модели (4)

В режиме синхронизации установившиеся значения фазовых ошибок определяются соотношением

$$\varphi_n^s = \arcsin \gamma_n, \quad (17)$$

На рис. 12 даны графики зависимости φ_n^s от n для различных γ и δ (точки для разных n соединены прямыми).

При $\gamma < 1, \delta < 1$ все элементы цепочки синхронизируются. Изменение значений φ_n^s с ростом пространственной координаты имеет характер устойчивого процесса,

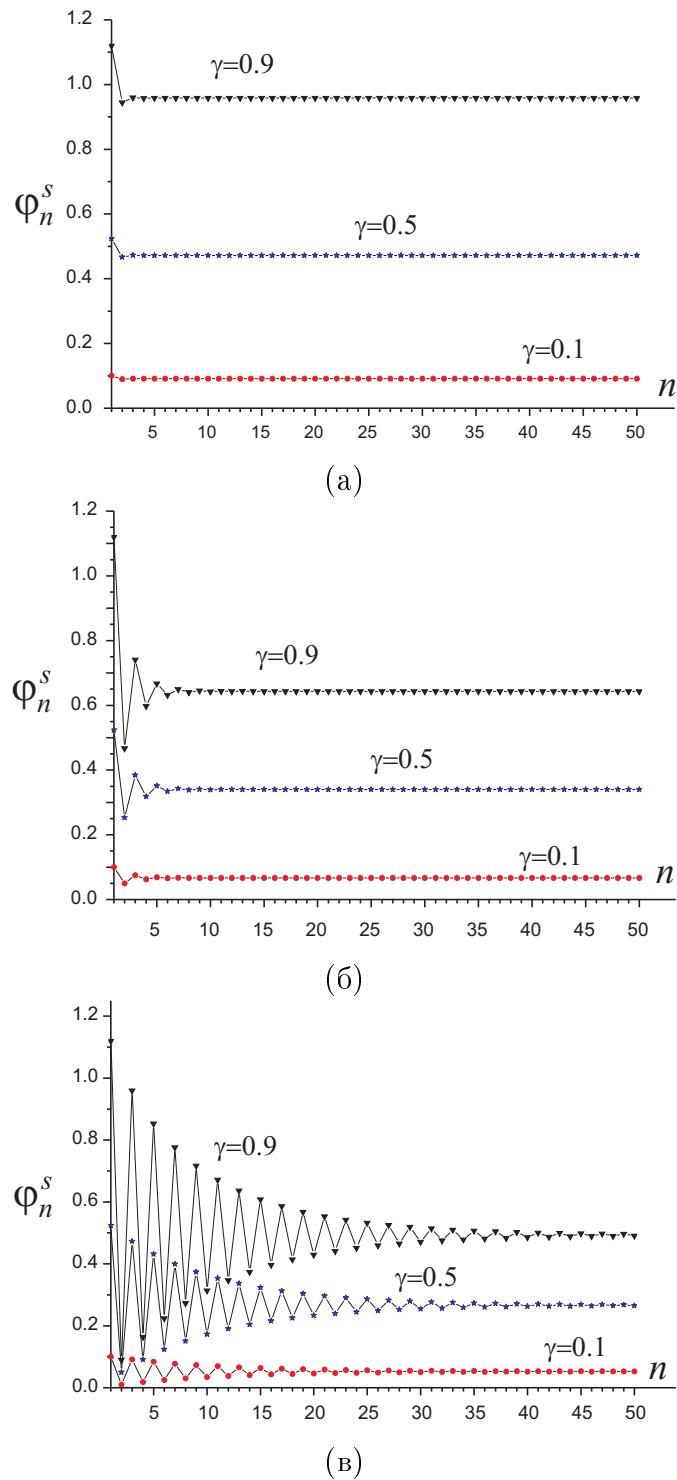


Рис. 12: Эволюция фазовых ошибок φ_n^s синхронного режима вниз по потоку при $\delta = 0.1$ (а), 0.5 (б), 0.9 (в)

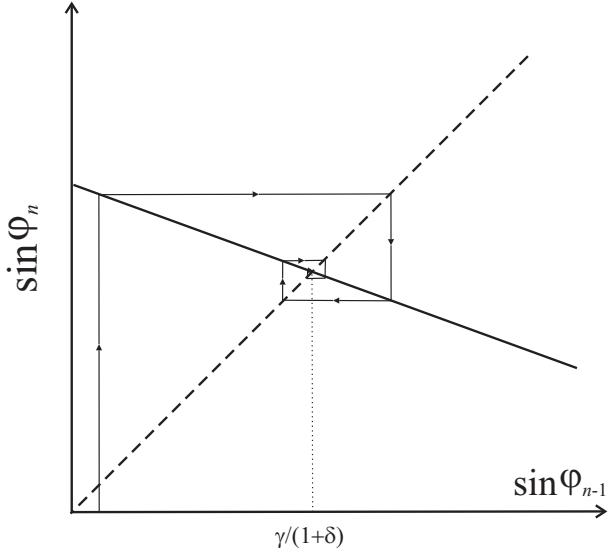


Рис. 13: Диаграмма Ламерея отображения $\sin \varphi_i = \gamma - \delta \sin \varphi_{i-1}$

стремящегося к некоторому значению $\bar{\varphi}^s = \arcsin[\gamma/(1 + \delta)]$. Это значение соответствует устойчивой при $\delta < 1$ неподвижной точке отображения: $\gamma - \sin \varphi_i - \delta \sin \varphi_{i-1} = 0$. Для иллюстрации на рис. 13 приведена диаграмма Ламерея, соответствующая этому отображению при $0 < \delta < 1$. Таким образом можно считать, что в цепочке, описываемой уравнениями (4), начиная с некоторого номера n устанавливается пространственно квазиоднородный режим синхронизации.

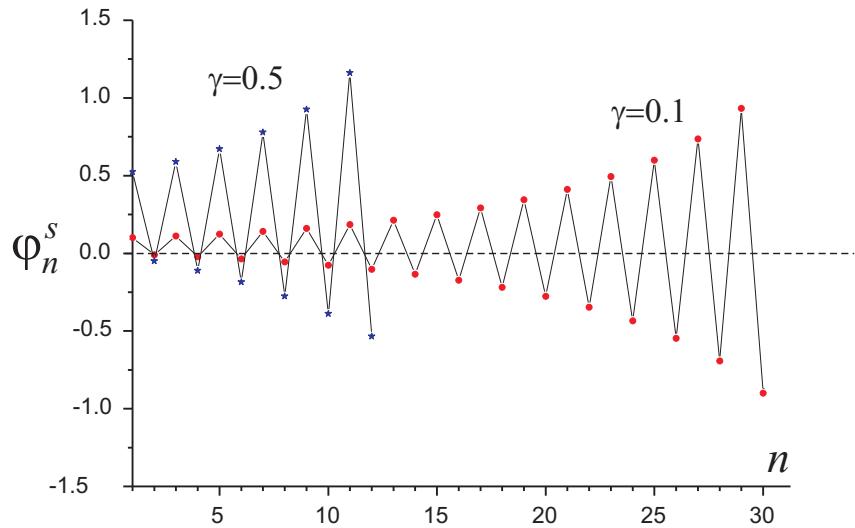


Рис. 14: Эволюция фазовых ошибок φ_n^s синхронного режима вниз по потоку при $\delta = 1.1$

При $\gamma < 1$, $\delta > 1$ синхронизируются только элементы цепочки с номерами $1 \leq n \leq n^*$. При этом изменение значений φ_n^s с ростом пространственной координаты имеет характер неустойчивого процесса (рис. 14). Для элементов цепочки с

номерами $n > n^*$ в цепочке устанавливаются асинхронные режимы. Отметим, что при усилении антагонистической связи из режима синхронизации элементы цепочки «выпадают» поодиночке, а при усилении кооперативных связей – сначала парами, далее поодиночке. Нарушение режима синхронизма сопровождается возникновением либо квазисинхронного режима, либо режима биений. При вариациях параметров автоколебательные режимы эволюционируют, образуя достаточно сложную, но стройную картину перестроек асинхронных режимов. Рассмотрим эти картины на примере ансамблей их двух и трех элементов.

4.2 Асинхронные режимы

4.2.1 Ансамбль из двух элементов

Рассмотрим однородную цепочку, состоящую из двух элементов. Динамические процессы в такой цепочке описываются двумя первыми уравнениями модели (4)

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi_1, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi_2 - \delta \sin \varphi_1.\end{aligned}\tag{18}$$

Система (18) в силу периодичности ее правых частей по переменным φ_1 и φ_2 является нелинейной динамической системой на тороидальной фазовой поверхности $T_2 = \{\varphi_1(\text{mod}2\pi), \varphi_2(\text{mod}2\pi)\}$. Качественную структуру разбиения фазового пространства на траектории определяют особые траектории: состояния равновесия, сепаратрисы седел и предельные циклы [15]. Что касается предельных циклов, то в отличии от плоскости на тороидальной фазовой поверхности, кроме циклов охватывающих состояния равновесия (циклов 1-го рода или колебательных), могут существовать предельные циклы 2-го рода (вращательные), не охватывающие состояния равновесия, а охватывающие тор в направлении параллели и меридиана. Кроме того, на торе могут существовать устойчивые по Пуассону незамкнутые траектории. Характер поведения траекторий на тороидальной фазовой поверхности определяются числом вращения [22]

$$\nu_1 = \lim_{\varphi_1 \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(\varphi_1, \varphi_2^0)}{\varphi_1},$$

где $\Phi(\varphi_1, \varphi_2^0)$ решение (18). Интегральные кривые будут или замкнутые или незамкнутые в зависимости от рациональности или иррациональности числа вращения.

Первое уравнение (18) не зависит от второго и интегрируется. При различных значениях γ решение первого уравнения ведет себя по разному:

- при $\gamma \leq 1$ решение сходится к стационарному состоянию $\varphi_1^* = \arcsin \gamma$,

- при $\gamma > 1$ решение [13]

$$\varphi_1(\tau) = 2 \arctan \left[\frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \tan \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{2} (\tau + \tau_0) \right] \quad (19)$$

постоянно возрастает на классе эквивалентности $[-\pi, \pi]$ с отождествлёнными целочисленными сдвигами по всей действительной оси [23] при любом τ_0 и при непрерывном увеличении τ . Так как решения первого уравнения (18) не могут быть колебательными, то циклы первого рода в фазовом пространстве модели (18) отсутствуют. На рис. 15 приведено разбиение плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$ модели (18) на обла-

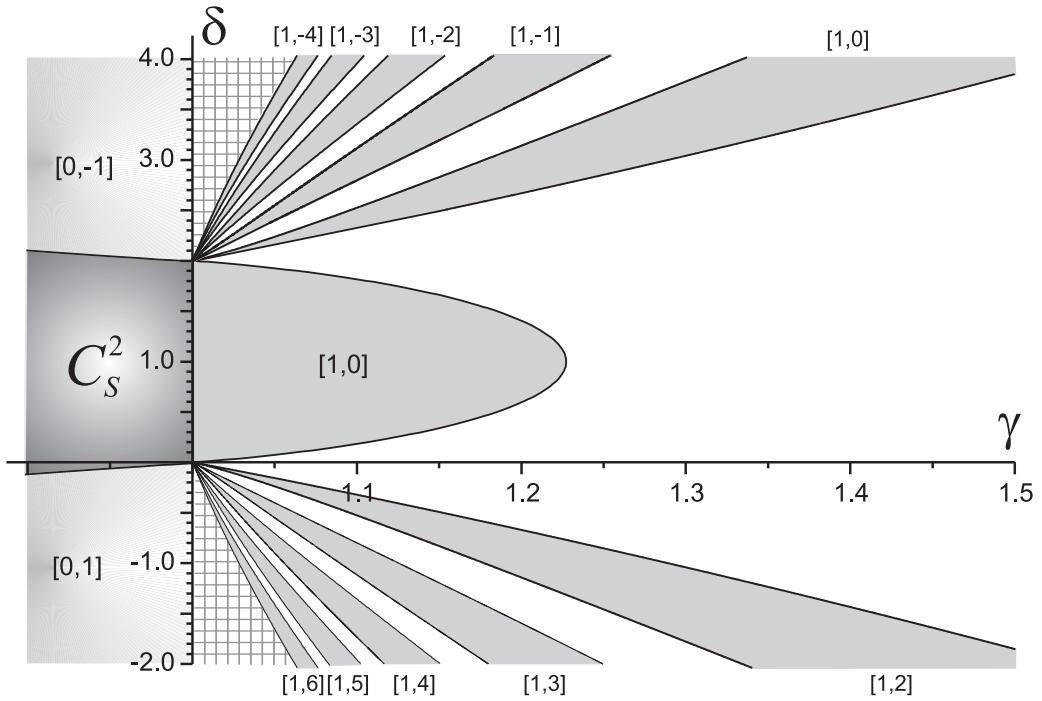


Рис. 15: Структура плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$ модели (18) [модели (4) при $N = 2$]

сти с различным динамическим поведением. Здесь серым цветом отмечен фрагмент области C_S^2 существования синхронного режима, а также наиболее крупные фрагменты областей существования устойчивых предельных циклов $L_{1,0}$ (рис. 16а), $L_{1,-1}$ (рис. 16в), $L_{1,-2}$, $L_{1,-3}$, $L_{1,-4}$, $L_{0,-1}$ (рис. 16е) и $L_{1,2}$, $L_{1,3}$, $L_{1,4}$ (рис. 16ж), $L_{1,5}$, $L_{1,6}$ (рис. 16з), $L_{0,1}$. Обозначения для выделенных областей $[i, j]$ совпадают с рациональным числом вращения $\nu = i/j$ аттрактора $L_{i,j}$. Знак минус перед i (j) означает, что координата φ_1 (φ_2), изображающей предельный цикл точки с ростом τ убывает. Равенство $i = 0$ ($j = 0$) соответствует тому, что переменная φ_1 (φ_2) на циклах $L_{0,1}$ и $L_{0,-1}$ ($L_{1,0}$ и $L_{-1,0}$) ограничена. При $\gamma > 1$ области существования предельных циклов ограничены бифуркационными кривыми двукратного предельного цикла (один из мультиплликаторов предельного цикла обращается в +1). В модели (18) области

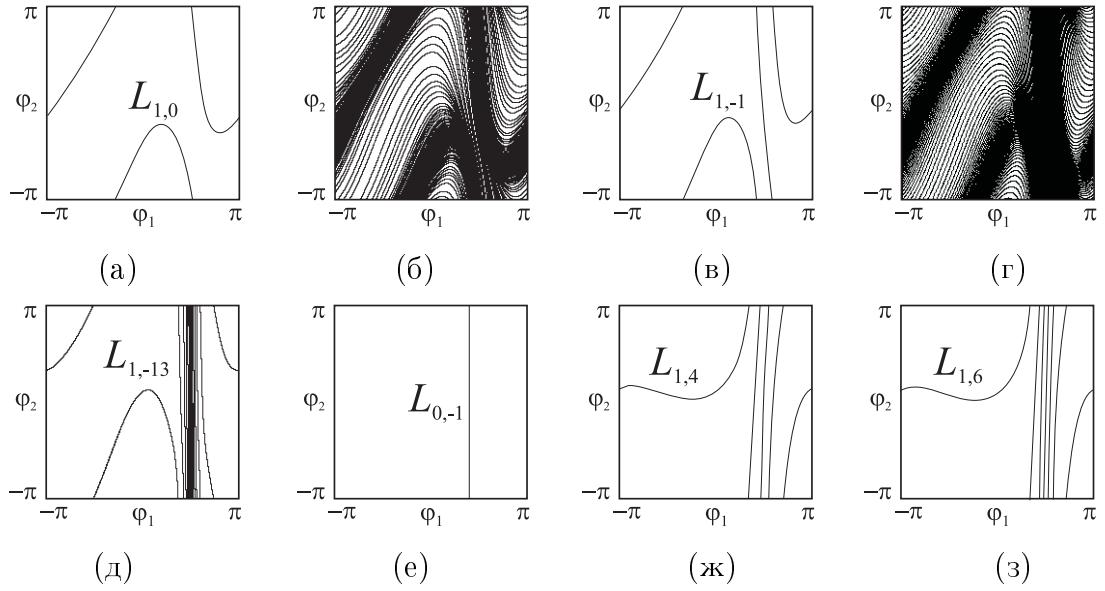


Рис. 16: АтTRACTоры модели (18) при $\delta=3.5, \gamma=1.3$ (а); $\gamma=1.24$ (б); $\gamma=1.16$ (г); $\gamma=1.08$ (д); $\gamma=0.95$ (е); $\delta=-1.5, \gamma=1.1$ (ж); $\gamma=1.05$ (з)

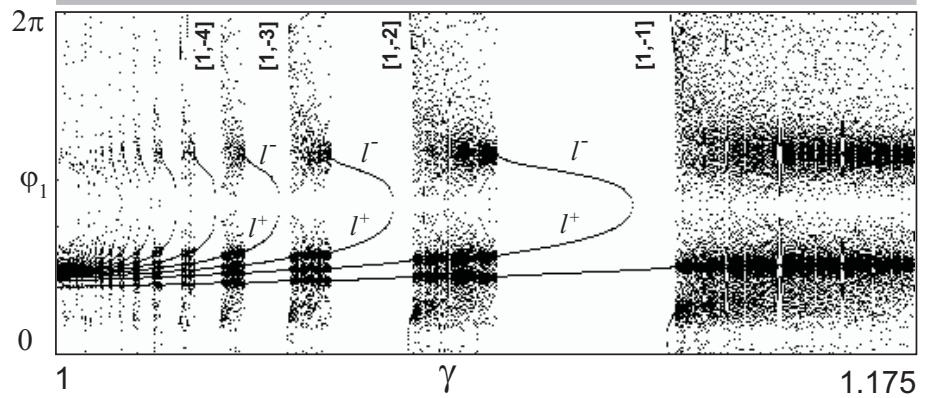


Рис. 17: Диаграмма отображения Пуанкаре модели модели (18) при $\delta=3$. Секущая $\varphi_2=0$

существования предельных циклов перемежаются областями существования атTRACTоров с иррациональным числом вращения (рис. 16б,г). При этом, в случае $\gamma > 1$, периодические решения модели (18) по переменной φ_1 имеют индекс $i = 1$, а индекс j , характеризующий число набегов на 2π по переменной φ_2 , с убыванием γ по абсолютному значению растет. Отметим, что с убыванием γ как области существования предельных циклов, так и области существования квазипериодических решений сужаются и накапливаются к прямой $\gamma = 1$. На рис. 15 пространство, включающее области квазипериодических решений и периодических решений с индексом $j < -4$ при $\delta > 2$ и $j > 6$ при $\delta < 2$, отмечено штриховкой. На рис. 17 представлена однопараметрическая диаграмма отображения Пуанкаре, иллюстрирующая эволюцию

решений модели (18) при фиксированных значениях δ с уменьшением γ . Так переменная переменная φ_1 постоянно нарастает, то на диаграмме представлена эволюция вспомогательной величины $\bar{\varphi}_1 = \varphi_1(\text{mod}2\pi)$, линия над диаграммой означает, что переменная φ_1 нарастает. Наличие в области регулярных движений дополнительных линий обусловлено сложной формой предельных циклов.

4.2.2 Ансамбль из трех элементов

При увеличении числа элементов в цепочке односторонне связанных СФС структура пространства параметров модели (4) усложняется, при этом модель размерности N всегда наследует структуру пространства параметров модели размерности $N - 1$. Установлено, что сценарии трансформации областей существования различных регулярных движений аналогичны и при увеличении N повторяются. Изменения обусловленные ростом N мы рассмотрим на примере перехода от модели (18) к модели (4) при $N = 3$.

Модель (4) в случае $N = 3$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi_1, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi_2 - \delta \sin \varphi_1, \\ \frac{d\varphi_3}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi_3 - \delta \sin \varphi_2.\end{aligned}\tag{20}$$

Модель (20) определена на трехмерном фазовом торе $T_3 = \{\varphi_1(\text{mod}2\pi), \varphi_2(\text{mod}2\pi), \varphi_3(\text{mod}2\pi)\}$. Движениями на торе T_3 , по аналогии с движениями на поверхности T_2 , будем характеризовать тремя числами $[i, j, k]$, при этом заметим, что в силу односторонненности дополнительных связей значения i, j в модели (20) наследуются от движений системы (18) и остаются неизменными. Поведения траекторий на торе T_3 можно характеризовать числами вращения ν_1 и ν_2 , где

$$\nu_2 = \lim_{\varphi_2 \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(\varphi_2, \varphi_3^0)}{\varphi_2}.$$

Решения (20) будут замкнутые, если ν_1 и ν_2 рациональные числа, и незамкнутые, если ν_1 или ν_2 иррациональны. Отсюда следует, что периодические движения модели (20) могут существовать только при значениях параметров из областей существования периодических и синхронных режимов модели (18).

На рис. 18а приведена часть плоскости $\{\gamma, \delta\}$ модели (20) в интервале $0 < \delta < 2$, которая в модели (18) захватывает часть области C_S^2 синхронных режимов и область периодических режимов типа $[1,0]$ (см. рис. 15). Рассмотрим трансформацию этих областей при переходе от модели (18) к модели (20).

В модели (20) область C_S^2 разделяется на две области: синхронных режимов C_S^3 и периодических режимов типа $[0,0,1]$. Проекция периодического движения типа $[0,0,1]$

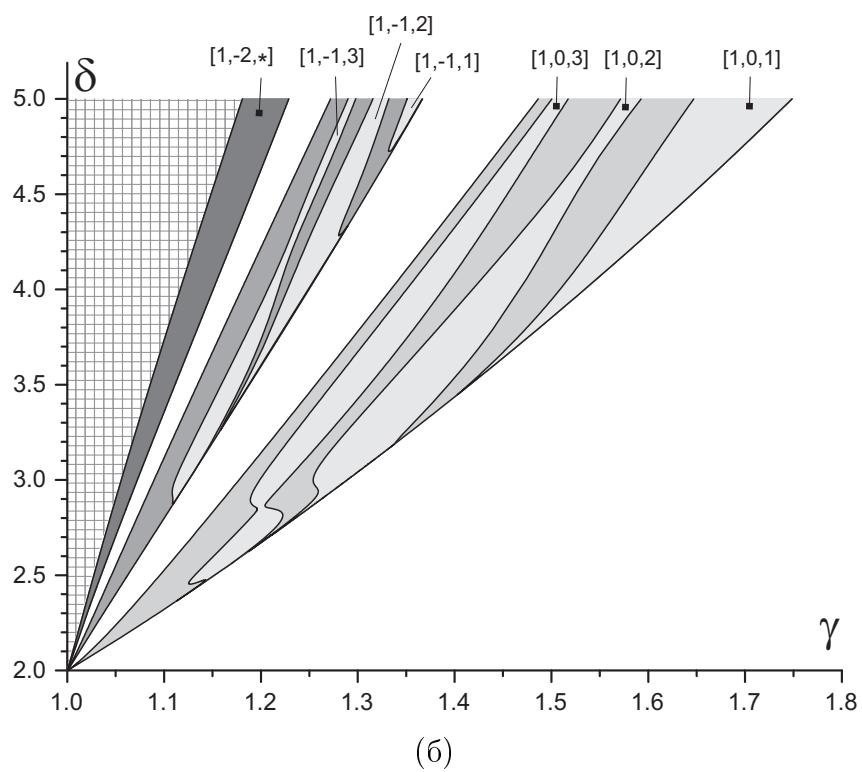
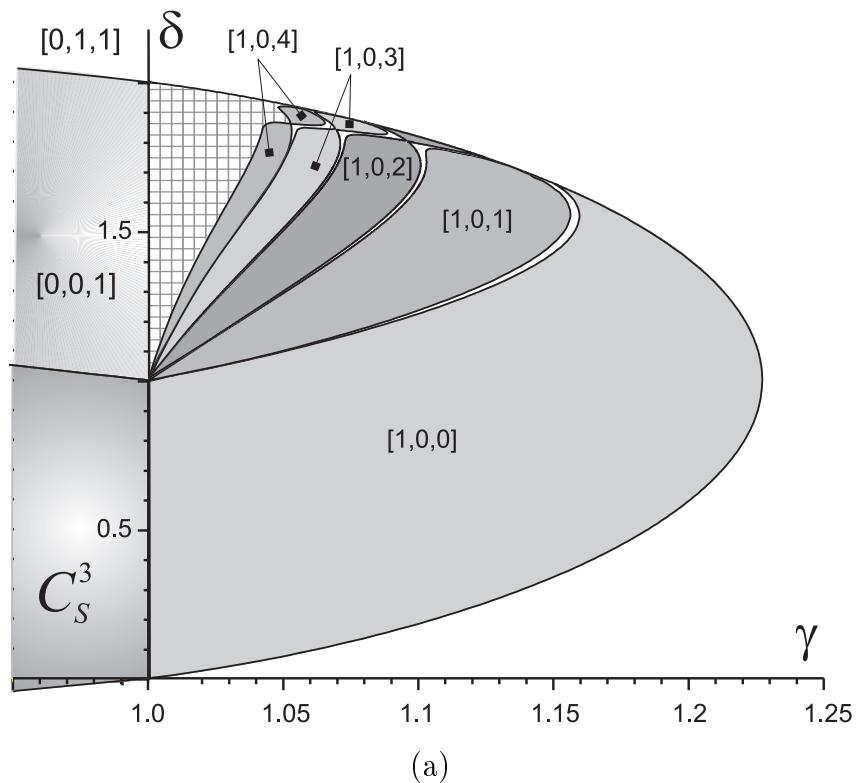


Рис. 18: Фрагменты плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$ модели (20) [модели (4) при $N = 3$].

на плоскость (φ_1, φ_2) есть точка, а на плоскость (φ_2, φ_3) – отрезок параллельный оси φ_3 . Область периодических режимов модели (18) типа [1,0] превращается в слоистую структуру, где области существования периодических движений типа $[1, 0, k]$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ перемежаются областями квазипериодических режимов. На рис. 18а области существования периодических типа $[1, 0, 0]$, $[1, 0, 1]$, $[1, 0, 2]$, $[1, 0, 3]$, $[1, 0, 4]$, выделены оттенками серого цвета, области существования квазипериодических движений – белым. Области существования предельных циклов тип $[1, 0, k]$ и области квазипериодических решений с увеличением k сужаются и накапливаются к прямой $\gamma = 1$. Пространство с тонкой структурой (содержащее области квазипериодических решений и периодических решений с индексом $k > 4$) на рис. 18а заштрихована. Области существования периодических движений ограничены бифуркационными кривыми двукратных предельных циклов, которые собираются в точке $(\gamma=1, \delta=1)$.

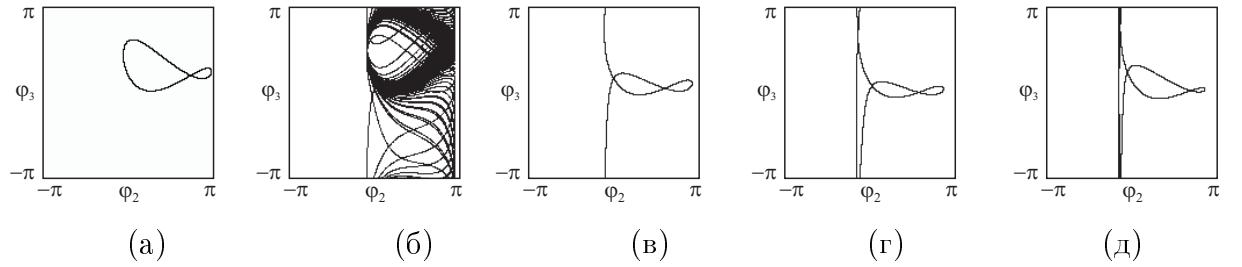


Рис. 19: Проекции аттракторов модели (18) на плоскость (φ_2, φ_3) при $\delta=1.5$, $\gamma=1.17$ (а); $\gamma=1.157$ (б); $\gamma=1.12$ (в); $\gamma=1.07$ (г); $\gamma=1.04$ (д)

На рис. 18б приведен фрагмент плоскости $\{\gamma, \delta\}$ модели (20) для $\delta > 2$. В модели (18) этот фрагмент представляет собой слоистую структуру, состоящую из областей существования периодических решений типа $[1, j]$, $j = 0, -1, -2, -3, \dots$, разделенных областями квазипериодических движений (см. рис. 15). В модели (20) области модели (18) квазипериодических движений сохраняются, периодических решений типа $[1, j]$ расслаиваются на области периодических решений типа $[1, j, k]$ и квазипериодических решений. Примеры расслоения областей существования периодических решений типа $[1, 0]$ и $[1, -1]$ модели (18), при переходе к модели (20), представлены на рис. 18б. У модели (20) в области $[1, 0]$ установлено существование периодических решений с индексами $[1, 0, 1]$, $[1, 0, 2]$ и $[1, 0, 3]$, в области $[1, -1]$ – с индексами $[1, -1, 1]$, $[1, -1, 2]$ и $[1, -1, 3]$. На рис. 18б области существования периодических решений отмечены светлыми тонами, квазипериодических – темными, пространство с тонкой структурой заштриховано.

4.2.3 Особенности динамики парциального элемента цепочки произвольной длины

Рассмотрим цепочку произвольной длины, функционирующую в режиме частичной синхронизации. В такой цепочке представлены все возможные динамические режимы парциальных элементов. Первые n^* элементов находятся в режиме синхронизма, СФС_{n^*+1} функционирует в режиме биений, где φ_{n^*+1} изменяется согласно (19). Колебания следующих элементов цепочки могут быть квазипериодическими и периодическими, как простой, так и сложной формы. Характер колебаний зависит от номера n элемента цепочки и параметров модели γ и δ .

Колебания СФС_n подчиняются уравнению

$$\frac{d\varphi_n}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi_n - \delta \sin \varphi_{n-1}, \quad (21)$$

и могут быть только регулярными. Хаотическими они могли бы быть только при хаотическом изменении переменной φ_{n-1} , однако структура рассматриваемой цепочки этого не допускает. Для $n < n^*$ переменная φ_{n-1} есть константа. При $n = n^* + 1$ уравнение (21), учитывая (19), преобразуется в неавтономное уравнение первого порядка с регулярной динамикой. Динамика модели (21) в этом случае аналогична динамике модели (18) при $\gamma > 1$. При $n = n^* + 2$ уравнение (21) есть динамическая система первого порядка с внешним регулярным воздействием. В этом случае динамика модели (21) аналогична динамике модели (19) и является регулярной. Дальнейшее продвижение вниз по потоку не меняет регулярности воздействия (переменной φ_{n-1}), поэтому хаотических колебаний в модели (4) быть не может.

Разбиение плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$ модели (4) при увеличении N наследует структуру плоскости параметров цепочек с меньшим числом элементов, при этом бифуркационные кривые, определяющие структуру плоскости $\{\gamma, \delta\}$ в случае N при $N+1$ не только сохраняются, но и остаются на месте. Данный факт наглядно иллюстрируют параметрические портреты на рис. 15 и рис. 18, а также картины отображения Пуанкаре на рис. 20.

Однопараметрические $\{\gamma, \varphi_i\}$ -диаграммы отображения Пуанкаре (рис. 20) порождены фазовыми траекториями модели (4) на секущей $\varphi_1=0$ при $\delta = 4.5$ и увеличении γ . Они отражают перестройки динамических режимов пяти элементов цепочки, начиная со второго, при вариациях начальной частотной расстройки, а также трансформацию колебаний вниз по потоку. Первый элемент цепочки функционирует в режиме биений, при котором переменная φ_1 постоянно нарастает. Динамика второго элемента цепочки для фиксированной силы связи определяется параметром γ . Мы выбрали два диапазона: $\gamma \in [1, 225; 1, 31]$, содержащий значения параметров, при которых второй элемент функционирует в режиме биений с убывающей разностью фаз

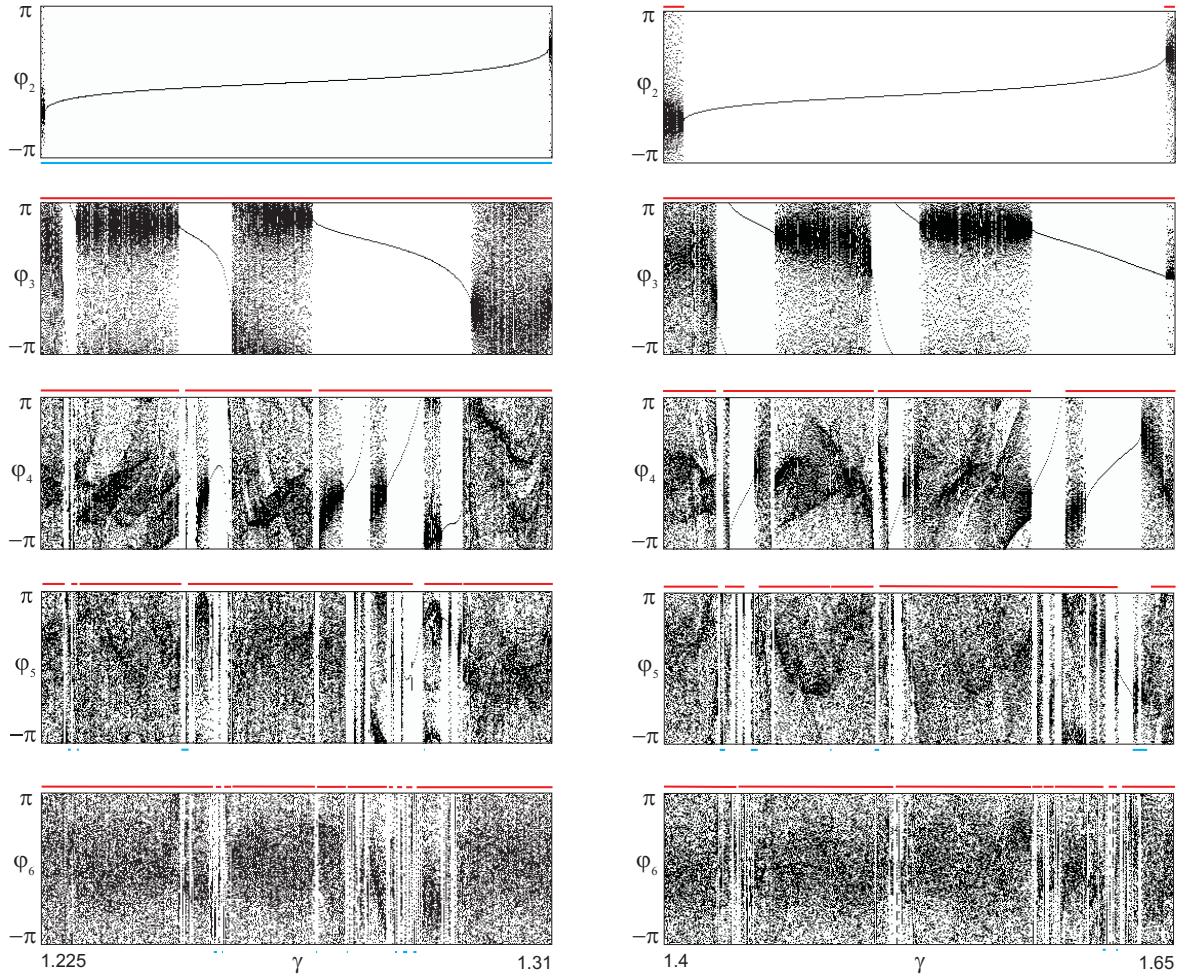


Рис. 20: Однопараметрические $\{\gamma, \varphi_i\}$ -диаграммы отображения Пуанкаре модели (4) при $\delta = 4.5$, $\gamma \in [1, 225; 1, 31]$ (левая колонка) и $\gamma \in [1, 4; 1, 65]$ (правая колонка). Секущая $\varphi_1 = 0$.

φ_2 , и $\gamma \in [1, 4; 1, 65]$, – второй элемент функционирует в режиме квазисинхронизма. На краях выбранных диапазонов СФС₂ реализуется режим биений, определяемым квазипериодическим движением, при этом в первом диапазоне разность фаз φ_2 убывает, во втором – нарастает. На диаграммах режим биений характеризуется линиями над и под диаграммами. Линии над (под) диаграммами означают, что соответствующие фазовые переменные φ_i при $\tau \rightarrow +\infty$ нарастают (убывают), отсутствие линий свидетельствует, что соответствующие фазовые переменные ограничены, что характерно для квазипериодических режимов.

Если состояние φ_n меняется периодически, то характер изменения переменной φ_{n+1} может быть как периодическим, так и квазипериодическим. На плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$ область существования периодических движений n -го элемента, для $n+1$ -го элемента расслаивается – области периодических движений перемежаются областями квазипериодических движений. Области существования периодических

режимов n -го элемента с ростом n достаточно быстро сокращаются и практически вырождаются при небольших изменениях n . Квазипериодические колебания, возникшие в n -ом элементе цепочки, далее сохраняются в последующих элементах цепочки.

4.3 Подавление колебаний «вниз по потоку»

В результате анализа автоколебательных режимов элементов цепочки параллельно связанных СФС был обнаружен эффект подавления колебаний «вниз по потоку». Данный эффект для цепочек связанных СФС не является новым, ранее он наблюдался, например, в ансамблях взаимосвязанных фазовых систем [24]. Суть эффекта состоит в том, что амплитуда колебаний в элементе цепочки с номером n с ростом n уменьшается. В модели (4) данный эффект наблюдается для определенного типа движений на торе T_N и при определенных значениях параметров модели.

Подавление колебаний наблюдается при значениях параметров (γ, δ) , принадлежащих области существования движений типа $[1, 0]$ в модели (18) (см. рис. 15) или движений типа $[1, 0, 0]$ в модели (20) (см. рис. 18а), причем не для всех значений параметров, а лишь для значений $\delta < 1$. Например, при $\gamma = 1.1$ и $\delta = 0.4$ в цепочке устанавливается режим, в котором СФС₁ функционирует в режиме биений, остальные элементы цепочки находятся в режиме квазисинхронизации. При этом амплитуда колебаний с ростом номера будет уменьшаться. Начиная с некоторого элемента n_0 амплитуда всех элементов с номером $n > n_0$ будет пренебрежимо малой и тогда можно говорить, что начиная с элемента n_0 в цепочке с некоторой точностью установленся режим синхронизации. Квазисинхронный режим с малой амплитудой колебаний далее будем называть *режимом условной синхронизации*. На рис. 21 приведены осциллограммы изменения переменных $\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_9$ при значениях параметров $\gamma = 1.1$ и $\delta = 0.5$. Эти производные определяют скорости изменения фазовых переменных $\varphi_2 - \varphi_9$, а диапазоны их изменения характеризуют близость частот колебаний с опорного и управляемых генераторов. Равенство разности частот нулю соответствует синхронизации колебаний управляемых генераторов опорным сигналом. Близость разности частот нулю, означает, что частоты колебаний управляемых генераторов и опорного генератора близки, т.е. можно говорить о синхронизации с определенной точностью.

При значениях $1 < \delta < 2$ эффект подавления колебаний сохраняется, но не для всех элементов цепочки. Здесь затухание колебаний наблюдается лишь для конечного числа элементов n_1 . Для элементов цепочки с номерами $n > n_1$ амплитуда колебаний вновь возрастает вплоть до срыва на режим биений. На рис. 22 представлены проекции фазовых траекторий модели (4) на расширенные локальные фазовые пространства $\{\varphi_i, \dot{\varphi}_i\}$ для значений $1 < \delta < 2$. Из представленных картин следует, что вначале цепочки имеет место процесс подавления колебаний вниз по потоку до

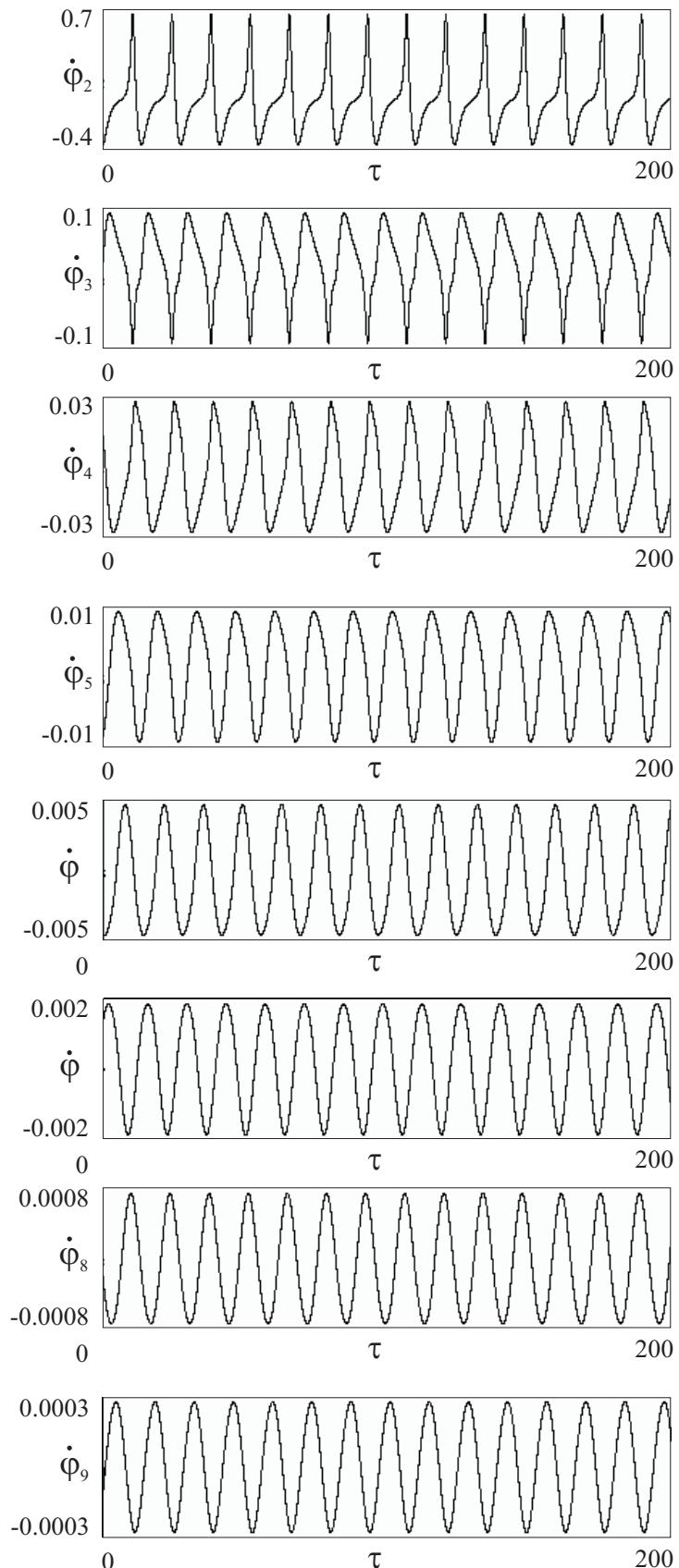
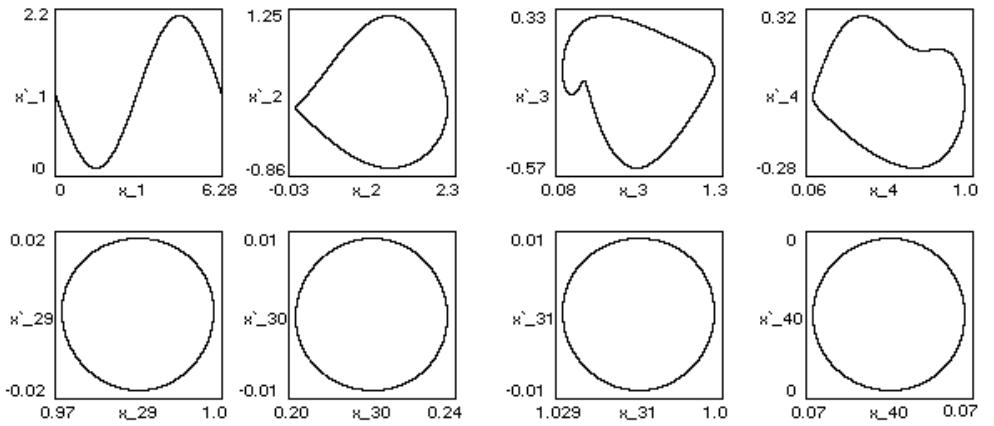
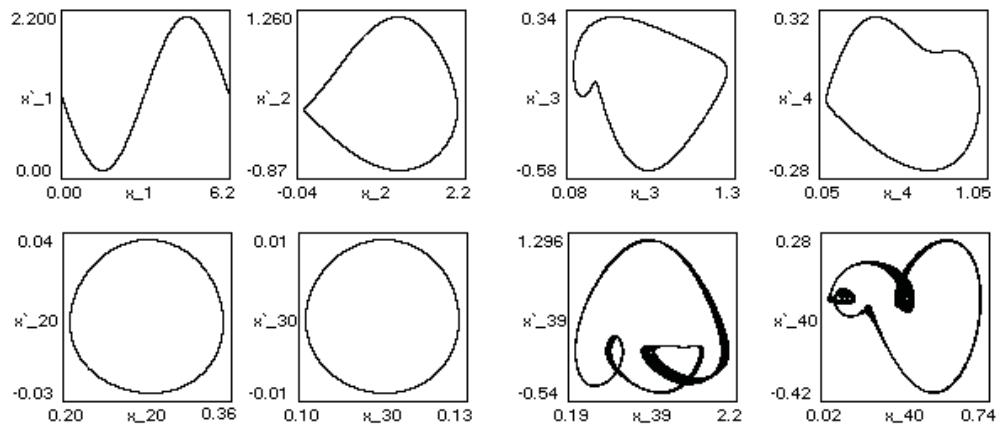


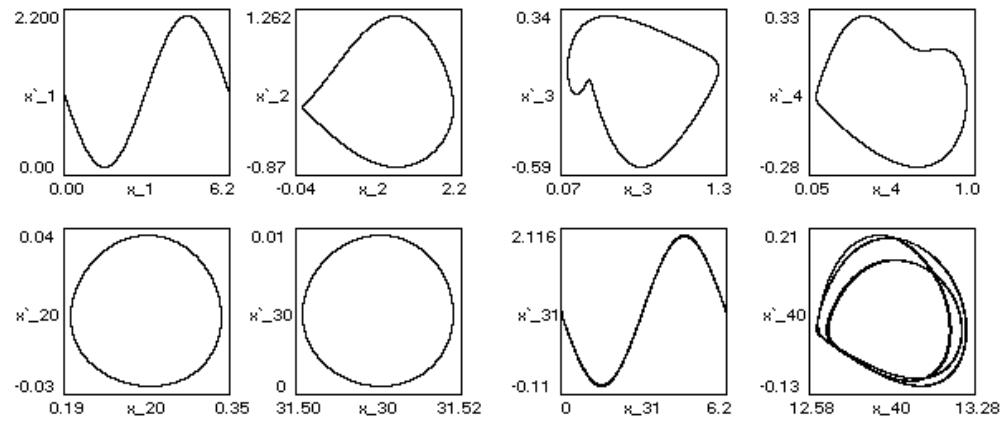
Рис. 21: Осциллограммы скоростей изменения фазовых координат при параметрах $\gamma = 1.1$ и $\delta = 0.5$



(a)



(б)



(в)

Рис. 22: Проекции фазовых траекторий модели (4) на расширенные локальные фазовые пространства $\{\varphi_i, \dot{\varphi}_i\}$ при $\gamma = 1.1$, $\delta = 1.04$ (а), $\delta = 1.049$ (б), $\delta = 1.05$ (в)

установления режима условной синхронизации. Режим условной синхронизации сохраняется до конечного числа элементов $n < n_1$. Для элементов цепочки с номерами $n > n_1$ наблюдается рост амплитуды колебаний – режим условной синхронизации СФС _{n} сменяется либо режимом квазисинхронизации, либо режимом биений.

При $\delta > 2$ в областях существования движений типа $[1, 0]$ модели (18) ($[1, 0, 0]$ модели (20)) эффект подавления колебаний не наблюдается, здесь в цепочке наблюдается процесс дерегуляризации, описанный в разделе 4.2.3 (см. описание рис. 20).

4.4 Построение карт динамических режимов

Наглядным представление коллективного поведения ансамблей связанных СФС являются карты динамических режимов [9]. В основе построения карт динамических режимов лежит метод точечных отображений [25]. Поскольку для рассматриваемых моделей выбрать глобальную секущую не удается, то точечные отображения строятся в локальных фазовых пространствах на локальных секущих. Так размерность локальных фазовых пространств в модели (4) равна единице, то мы будем пользоваться понятием расширенного фазового пространства. Обычно в классической механике под расширенным фазовым пространством понимают фазовое пространство, дополненное координатой времени. В нашем случае переменную φ_i дополним переменной $\dot{\varphi}_i$, характеризующей разность частот. Тогда для каждого элемента

$$M_i = \{(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) \mid \varphi_i \in \mathbb{S}, \dot{\varphi}_i \in \mathbb{R}\},$$

для $\forall i \in \mathbb{N}$. Пространство M_i , с точки зрения топологии, представляет собой цилиндр. Отметим тут, что при таком задании расширенного локального фазового пространства координата $\dot{\varphi}_i$ не фазовая, следовательно внутри такого пространства траектории могут иметь точки самопересечения и при изучении таких траекторий следует обращать внимание на такие точки. В локальном пространстве M_i каждого элемента ансамбля введём три секущие Пуанкаре как функции координат этого расширенного локального фазового пространства:

$$\begin{aligned} S^0(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) &= a_0 + a_1 \varphi_i + a_2 \dot{\varphi}_i, \\ S^+(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) &= a_0^+ + a_1^+ \varphi_i + a_2^+ \dot{\varphi}_i, \\ S^-(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) &= a_0^- + a_1^- \varphi_i + a_2^- \dot{\varphi}_i, \end{aligned} \tag{22}$$

где коэффициенты $a_1^+ = a_1^- = a_1$, $a_2^+ = a_2^- = a_2$, а свободные члены $a_0^+ = a_0 - 2\pi$ и $a_0^- = a_0 + 2\pi$. Начальное значение для коэффициента a_0 можно выбрать любым из интервала $[-\pi, \pi]$ без потери общности.

Если траектории пространства M_i не пересекают ни одну из секущих, то это значит, что либо траектория стремится к состоянию равновесия, либо к предельному

циклу первого рода, либо к хаотическому колебательному аттрактору. Для проверки первого положения достаточно проверить равенство нулю фазовых скоростей, хотя в случае нашего пространства хватит проверки только второй координаты. Если фазовые скорости отличны от нуля на исследуемой траектории, то для проверки второго и третьего положений следует заменить коэффициенты секущей S^0 . Для этого сначала возьмём точку на траектории и вычислим касательный вектор $v \in M_i$, его компонентами будут значения производных по времени от координат в этой точке.

$$v = (\dot{\varphi}_i, \frac{d\dot{\varphi}_i}{d\tau}), \forall i \in \mathbb{N} \quad (23)$$

Этот вектор задаёт все компоненты новой секущей Пуанкаре кроме свободного члена, а его найдём, подставив координаты текущей точки в новое уравнение секущей:

$$a_0 = -a_1 \dot{\varphi}_i - a_2 \frac{\dot{\varphi}_i}{d\tau}. \quad (24)$$

Теперь у нас есть новое уравнение секущей, которую траектория стационарного автоколебательного режима в пространстве M_i трансверсально пересекает хотя бы один раз. Если траектория в пространстве M_i неоднократно трансверсально пересекает любую секущую S^k , то получаем набор B_i точек на секущей, которым можно качественно охарактеризовать соответствующий этому набору тип движения в пространстве M_i :

$$B_i = \{X_j^k = (\varphi_i^k, \dot{\varphi}_i^k) : X_j^k \in S^k\}. \quad (25)$$

Для каждой точки X_j^k можно определить тип секущей плоскости, которую траектория пересекла в данной точке, координаты на плоскости и направление пересечения. Заметим, что если траектория в пространстве M_i пересекает одну из плоскостей S^- или S^+ , то вся система секущих плоскостей смещается на 2π в соответствующую сторону.

Если набор B_i не содержит периодических точек, то есть точек, расстояние между которыми по норме меньше некоторого малого $\varepsilon > 0$, то соотношение частот колебаний φ_i и $\dot{\varphi}_i$ не выражается рациональным числом. Это значит, что траектория в пространстве M_i не замкнута и в общем случае может представлять собой либо устойчивое по Пуассону решение, всюду плотное в пространстве M_i , либо реализацию траектории на хаотическом аттракторе. Однако для дальнейшего анализа полезно обработать массив точек пересечения и выделить три класса квазипериодических траекторий в таком расширенном локальном фазовом пространстве.

Если в наборе в среднем больше точек пересечения секущей S^+ , то классифицируем движение как квазипериодическое с положительным набегом фазы, если в наборе в среднем больше точек пересечения секущей S^- , то классифицируем движение как квазипериодическое с отрицательным набегом фазы, если в среднем траектории пересекают секущие S^+ и S^- одинаковое количество раз, либо не пересекают их вообще,

то классифицируем движение как квазипериодическое колебательное движение. Если среди точек из B_i имеется точки, расстояние между которыми по норме меньше ε , то говорим, что в пространстве M_i есть отвечающая этим точкам периодическая траектория. Тогда назовём кратностью периодической точки следующую величину:

$$V_i = \min\{|j - i| \mid \|X_j^k - X_i^k\| < \varepsilon\}, \quad (26)$$

для некоторого малого $\varepsilon > 0$. Кроме этого для каждой точки набора B_i , с номерами m из полуинтервала $[i, j)$ сформируем суммы:

$$\Lambda^0 = \sum_m \delta_m^0, \quad (27)$$

$$\Lambda^+ = \sum_m \delta_m^+, \quad (28)$$

$$\Lambda^- = \sum_m \delta_m^-, \quad (29)$$

где $\delta_m^i = -1$, если траектория пересекает секущую «влево», $\delta_m^i = +1$, если траектория пересекает секущую «вправо». Тогда, можно провести следующую классификацию периодических движений с точки зрения введённых выше обозначений:

- Если все суммы Λ^k равны нулю, то периодическое движение колебательное, так как каждое пересечение любой секущей в одну сторону, если оно есть, компенсируется пересечением этой же секущей в обратную сторону;
- Если $\Lambda^0 = 0$, а $\Lambda^+ \neq 0$ или $\Lambda^- \neq 0$:
 - Если $\Lambda^+ > \Lambda^-$, то движение вращательное с набегом фазы в положительном направлении;
 - Если $\Lambda^+ < \Lambda^-$, то движение вращательное с набегом фазы в отрицательном направлении;
- $\Lambda^0 \neq 0$:
 - Если $\Lambda^+ = \Lambda^- = 0$, то движение колебательное, а координаты есть ограниченные функции времени;
 - Если $\Lambda^+ > \Lambda^-$, то движение колебательно-вращательное с нарастанием фазы;
 - Если $\Lambda^+ < \Lambda^-$, то движение колебательно-вращательное с убыванием фазы.

Для демонстрации метода поиска периодических точек отображения Пуанкаре применим его к системе 4 и произведём разделение ансамбля колебательных элементов на кластеры в указанном выше смысле. На рис. 23 показана такая классификация

для параметра γ из интервала $[1, 4; 1, 65]$ и фиксированного $\delta = 4.5$, что соответствует диаграмме отображения Пуанкаре на рис. 20. На вертикальной оси отмечены номера элементов цепочки. Нетрудно видеть, что окна периодичности на бифуркационной диаграмме соответствуют окнам, отмеченным соответствующим цветом на рис. (23), тем самым функционально повторяя основные свойства однопараметрических бифуркационных диаграмм. С другой стороны, теперь в нашем расположении есть информация о том, где и как располагаются кластеры элементов с различным характером динамики.

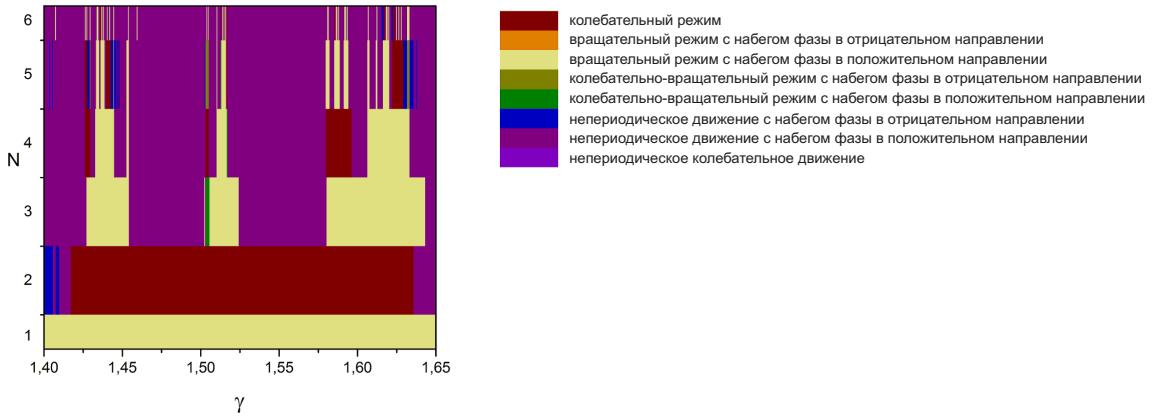


Рис. 23: Кластеризация по набору точек отображения Пуанкаре в системе (4) в случае $N = 6$ и $\delta = 4.5$

На рис. 23 красным цветом отмечены области, внутри которых движение соответствующего элемента колебательное, жёлтым - области вращательного движения с набегом фазы в положительном направлении. Зелёным цветом отмечены области вращательно-колебательного движения с набегом фазы в положительном направлении, тёмно-жёлтым - области вращательно-колебательного движения с набегом фазы в отрицательном направлении. Синим цветом отмечены области непериодического движения с набегом фазы в отрицательном направлении, фиолетовым - области непериодического движения с набегом фазы в положительном направлении.

5 Динамика цепочки с фильтром первого порядка в цепи управления

Рассмотрим цепочку, в качестве основного элемента которой возьмём систему СФС с фильтром первого порядка. Динамика такой цепочки описывается уравнениями (3). При $\varepsilon \ll 1$ система (3) является динамической системой с малыми параметра-

ми при производных $dy_n/d\tau, n = \overline{1, N}$. Полное движение в фазовом пространстве U разбивается [15] на «быстрые» и «медленные» движения. Поверхность медленных движений является устойчивой по отношению к быстрым движениям. Уравнения медленных движений на поверхности имеют вид (4). При $\varepsilon \ll 1$ динамика системы (3) аналогична динамике модели (4).

5.1 Режим синхронизации

Если значение параметра ε конечно, то координаты состояний равновесия системы (4) не меняются при добавлении инерционности в цепь управления и нетрудно показать, что локальное поведение траекторий вблизи этих состояний равновесия качественно сохраняется, а, следовательно, локальная устойчивость этих особых точек не зависит от величины инерционности. Тогда рассуждения, касающиеся синхронных режимов безынерционной цепочки, справедливы и для случая ненулевого параметра ε .

Однако глобальная устойчивость теперь может быть нарушена, если в системе появится мультистабильность динамических режимов. Кроме того локальное фазовое пространство для каждого элемента ансамбля с номером $i > 1$ теперь имеет размерность 3, следовательно, среди возможных предельных множеств траекторий системы (3) могут быть нерегулярные множества, например, странные хаотические аттракторы. Для последовательности рассуждений, как и ранее, рассмотрим сначала ансамбль из двух элементов.

5.2 Асинхронные режимы

5.2.1 Динамика модели (4) в случае $N = 2$

Пусть цепочка состоит всего из двух односторонне связанных элементов СФС, тогда система (3) сокращается до системы четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= y_1, \\ \varepsilon \dot{y}_1 &= \gamma - y_1 - \sin \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 &= y_2, \\ \varepsilon \dot{y}_2 &= \gamma - y_2 - \sin \varphi_2 - \delta \sin \varphi_1. \end{aligned} \tag{30}$$

Разбиение плоскости (γ, δ) на области с различным динамическим поведением представлено на рис. 24. Отметим, что структура разбиения сохраняется – области с разными числами вращения исходят из точек $(\gamma = 1, \delta = 2)$ и $(\gamma = 1, \delta = 0)$, их внешние границы соответствуют бифуркации двукратного предельного цикла, при переходе

из области синхронного режима в область $\gamma > 1$ через интервал $\delta \in (0, 1)$ рождается предельный цикл типа $[1,0]$. Однако, как и следовало ожидать при инерционной

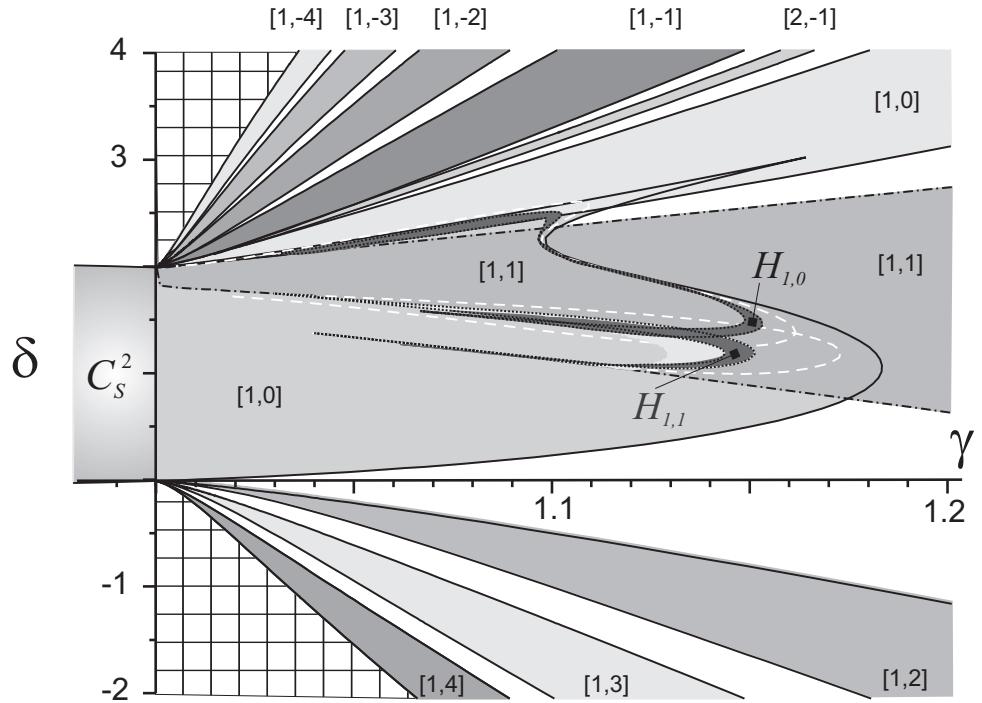


Рис. 24: Разбиение пространства параметров (γ, δ) на области, отвечающие различным динамическим режимам при $\varepsilon = 0.64$

цепи управления, близкие области пространства параметров начинают пересекать друг друга при увеличении параметра инерционности. Например центральная область $[1,0]$ на рис. (24) имеет непустое пересечение с областями $[1,0]$ и $[1,1]$. Значит динамический режим второго элемента уже глобально неустойчив и зависит от выбора начальных условий системы (31).

Ещё одно отличие ансамбля двух элементов СФС с инерционностью в цепи управления от ансамбля двух СФС без фильтра состоит в том, что при любом значении параметра $\gamma > 1$ найдётся интервал ненулевой меры по δ такой, что внутри него в фазовом пространстве системы (31) существует устойчивое периодическое движение $[1,1]$, причём его пересечение с интервалом $\delta \in [0, 2]$ всегда непусто. Другими словами, при любых начальных частотных расстройках выбором параметра δ и начальных условий всегда можно добиться такого режима работы системы, что частоты биений первого и второго элементов в точности совпадут, причём значение параметра δ всегда может быть выбрано из интервала $[0, 2]$ при любых $1 < \gamma < \infty$.

Так как вообще говоря локальное фазовое пространство второго элемента имеет размерность 3, то, как было указано выше, в локальном фазовом пространстве второго элемента системы (31) могут рождаться нерегулярные притягивающие множества,

что ведёт к хаотическому поведению выделенного элемента. На рис. 24 области $H_{1,1}$ и $H_{1,0}$ соответствуют областям существования вращательного и колебательного хаотических режимов относительно локального фазового пространства второго элемента ансамбля. Возникновение и исчезновение этих хаотических решений происходит посредством каскада удвоений периода для периодических движений типа [1, 1] и [1, 0]. Кроме того, существует область пространства параметров, в которой пересечение $H_{1,1}$ и $H_{1,0}$ непусто и в фазовом пространстве существуют два хаотических аттрактора.

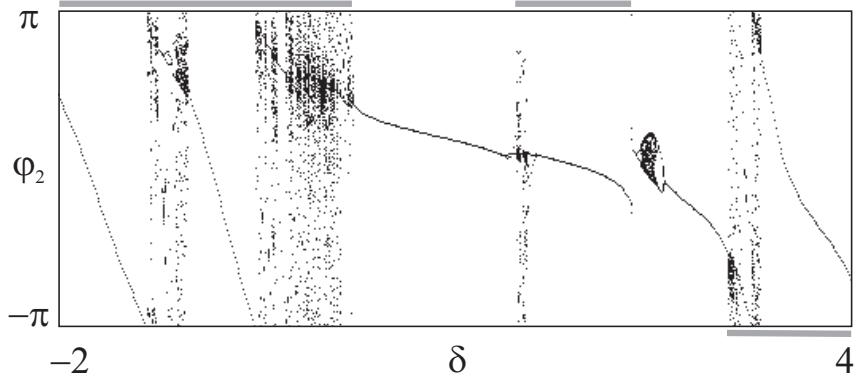


Рис. 25: Однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре при $\gamma = 1.1$ и $\varepsilon = 0.64$

На рис. 25 приведена однопараметрическая диаграмма отображения Пуанкаре для $\delta \in [-2, 4]$ при $\gamma = 1.1$ и $\varepsilon = 0.64$. Параметры выбраны таким образом, чтобы бифуркационная диаграмма иллюстрировала переходы между регулярными периодическими и квазипериодическими режимами, а также переходы между регулярными и хаотическими режимами. Важно отметить, что, как и в случае с цепочкой элементов с идеализированным фильтром, переход от вращений в отрицательном направлении к вращению в положительном направлении для второго элемента обязательно разделён областью конечной ширины по варьируемому параметру, в которой второй элемент находится в режиме квазисинхронизации.

5.2.2 Особенности динамики ансамблей с числом элементов $n > 2$

С учётом мультистабильности и хаотического поведения бифуркационный анализ пространства параметров для ансамблей большего размера представляет собой очень трудоёмкую задачу. Однако приведём некоторые общие замечания насчёт динамических режимов таких ансамблей.

Так как связь между элементами односторонняя, то разбиение пространства параметров, как и ранее, будет иметь наследственную структуру, общие границы

которой будут определяться динамикой элементов, предшествующих данному. Но области различных динамических режимов будут всё больше перекрываться друг с другом при росте числа элементов, что приведёт к ещё большей мультистабильности.

Если некоторый выделенный элемент с номером $i > 1$ работает в хаотическом режиме, то любой элемент с номером $j > i$ будет работать в хаотическом режиме. Воспользуемся оператором скользящего среднего:

$$A_\tau(\cdot) = \langle \cdot \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{\tau - \frac{T_0}{2}}^{\tau + \frac{T_0}{2}} \cdot dt, \quad (31)$$

где T_0 - период опорного генератора, а t – переменная интегрирования. Тогда, если применить этот оператор к обеим частям каждого уравнения, то мы получим соотношение средних характеристик для каждого элемента, причём в общем случае они будут нестационарны. В рамках сделанных обозначений выражение для средней частоты i -го элемента цепочки при $1 < i < \infty$ может быть записано следующим образом:

$$\langle y_i \rangle = \gamma \sum_{n=0}^{i-1} (-\delta)^n - \langle \sin \varphi_i \rangle - \varepsilon \sum_{n=0}^{i-1} (-\delta)^n \langle \dot{y}_{i-n} \rangle + \sum_{n=1}^{i-1} (-1)^{n+1} \delta^n \langle y_{i-n} \rangle. \quad (32)$$

Из этого уравнения видно, что если некоторый элемент цепочки, предшествующий i -му, находится в хаотическом режиме, то, при некоторых допущениях, его средние характеристики могут быть описаны определённым статистическим распределением и рассматриваться как случайные функции безразмерного времени. Тогда и средняя частота биений $\langle y_i \rangle$, как линейная функция средних характеристик предыдущих элементов обладает теми же признаками стохастического поведения.

6 Динамика цепочки каскадно связанных СФС с идеализированными фильтрами

В данном разделе представлены результаты изучения динамики модели цепочки каскадно (последовательно) связанных СФС. Рассмотрена наиболее простая однородная цепочка СФС идеализированными фильтрами в цепях управления, динамика которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (8). Мы сохраним схему рассмотрения коллективной динамики цепочки, принятую для параллельно связанных СФС. Сначала мы рассмотрим синхронные режимы, далее остановимся на рассмотрении особенностей асинхронных режимов в ансамблях малой размерности.

6.1 Синхронные режимы

Режиму глобальной синхронизации отвечают устойчивые состояния равновесия модели (8). Границы областей существования состояний равновесия модели цепочки из N элементов определяются из равенств

$$\frac{\gamma}{2^N} \sum_{k=0}^N C_k^n (1-\delta)^{N-k} \sqrt{D^{k-1}} \left(1 - (-1)^k \right) = \pm 1, \quad (33)$$

при $D \neq 0$, где $D = (1-\delta)^2 - 4\delta$, а C_k^n - биномиальные коэффициенты. Если $D = 0$, то границы областей определяются следующим образом:

$$\gamma N \frac{(1-\delta)^{N-1}}{2^{N-1}} = \pm 1. \quad (34)$$

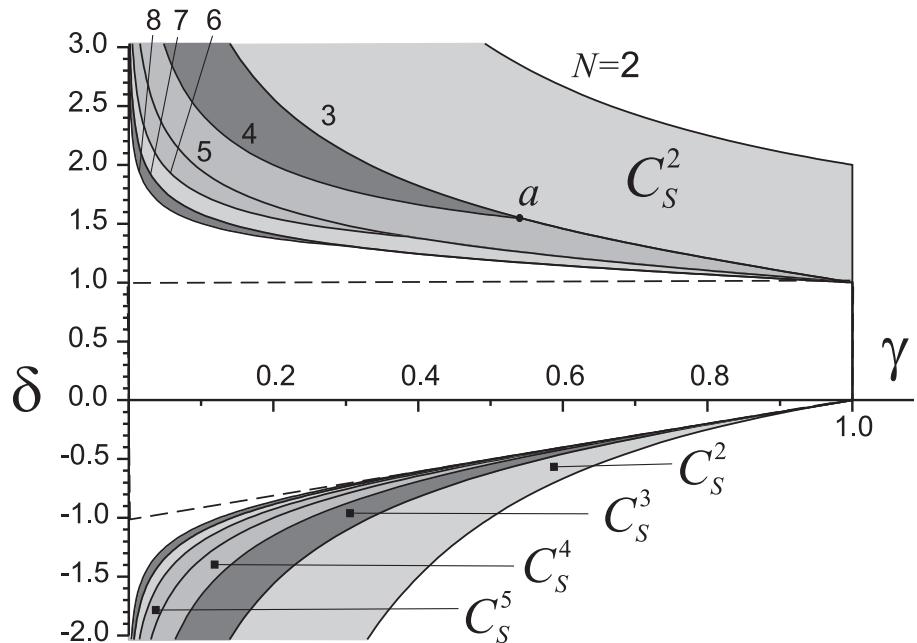


Рис. 26: Области C_S^N существования режимов глобальной синхронизации модели (7) для $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

На рис. 26 представлены границы областей существования синхронных режимов для первых восьми элементов цепочки. Общий характер разбиения совпадает с характером границ синхронных режимов для цепочки с идеализированными фильтрами: границы представляют собой гиперболы с крутизной, возрастающей с ростом N . При значениях параметров внутри выделенных областей соответствующая цепочка глобально устойчива, т.е. все элементы цепочки функционируют в синхронном режиме. При кооперативных связях ($\delta > 0$) границы областей синхронизации для чётных N имеют изломы в точках a . Ниже точек излома границы синхронных режимов для цепочек N и $N - 1$ элементов совпадают, выше – различны. При антагонистических связях ($\delta < 0$) границы областей C_s^n существования синхронных режимов гладкие.

6.2 Асинхронные режимы

6.2.1 Ансамбль из двух элементов

Математическая модель ансамбля из двух каскадно связанных элементов с идеализированным фильтром представляется системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi_1, \\ \frac{d\varphi_n}{d\tau} &= \gamma - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \delta \sin \varphi_1,\end{aligned}\tag{35}$$

определенной на двумерном торе T_2 . Структура фазового пространства зависит от двух параметров γ и δ . Движения, определяющие динамику модели (35) аналогичны движениям модели (4), это состояния равновесия, предельные циклы и траектории устойчивые по Пуассону. Разбиение плоскости $\{\gamma, \delta\}$ модели представлено на рис. 29.

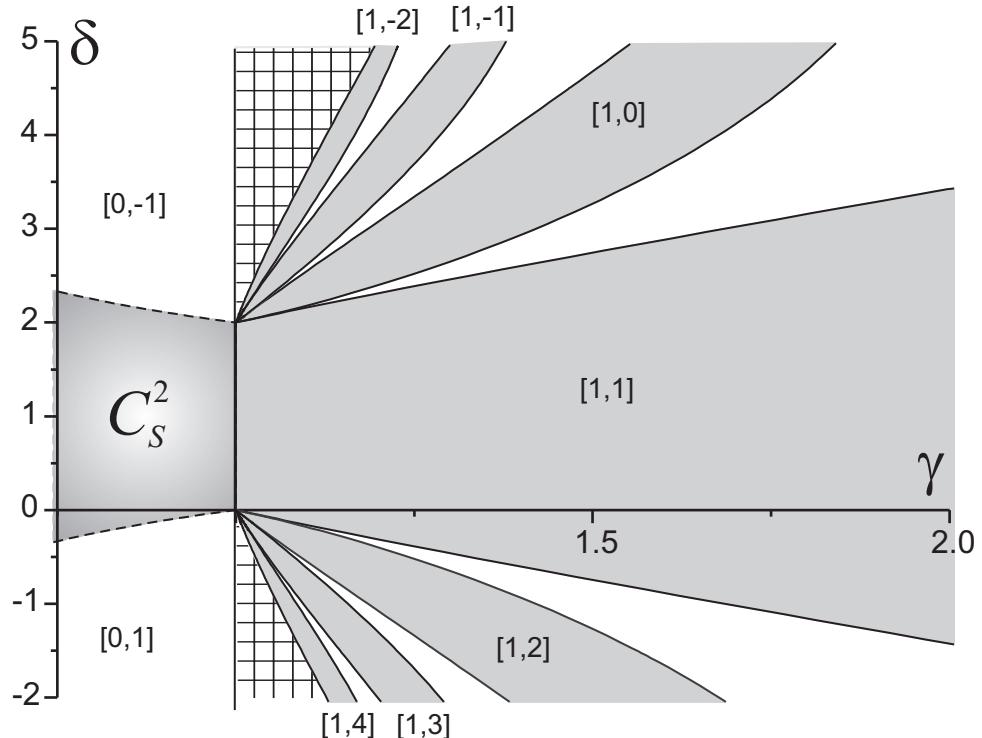


Рис. 27: Разбиение плоскости параметров (γ, δ) модели (35)

Качественно структура пространства параметров модели (35) практически не отличается от структуры пространства параметров модели (18). Плоскость параметров (γ, δ) содержит область C_s^2 глобальной устойчивости, пространство вне области C_s^2 заполнено областями периодических решений с различными числами вращения, разделенными областями квазипериодических движений. Границами областей периодических режимов служат бифуркационные кривые двукратных предельных циклов.

Отличительной особенностью параметрического портрета каскадного соединения является наличие достаточно большой области существования движений типа [1,1], где первый и второй генератор ведут себя идентично. Другая особенность модели (35) – области существования движений типа [1,0], где второй генератор функционирует в квазисинхронном режиме, имеет место лишь при $\delta > 2$, т.е. при сильных кооперативных связях. Этот факт практически исключает распространение квазисинхронных режимов вниз по потоку.

6.2.2 Ансамбль из трех элементов

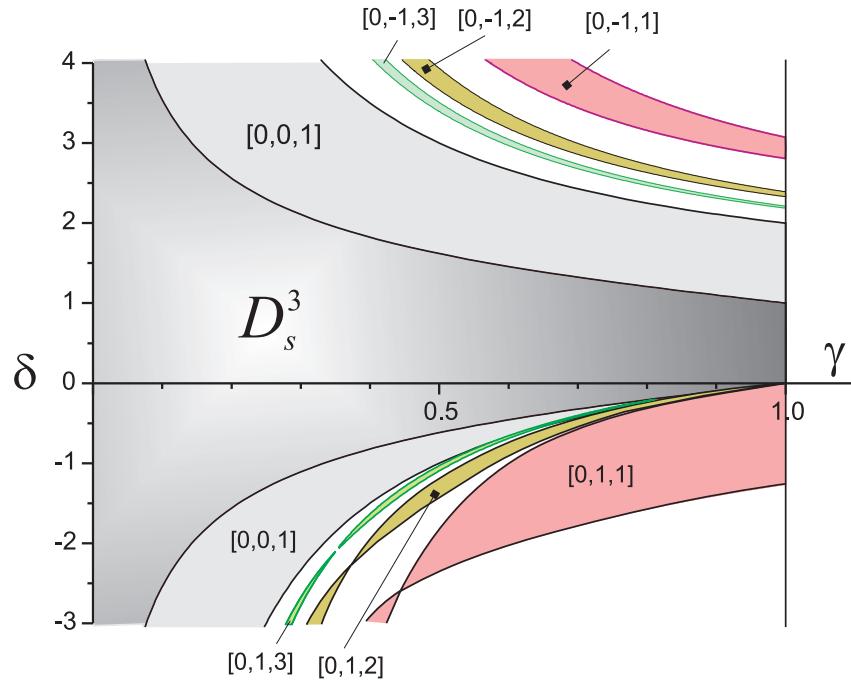
Математическая модель цепочки из трех каскадно связанных СФС с локальными дополнительными связями вперед представляется системой уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \gamma - \sin \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 &= \gamma - \sin \varphi_2 - \delta \sin (\varphi_2 - \varphi_1), \\ \dot{\varphi}_3 &= \gamma - \sin \varphi_3 - \delta \sin (\varphi_3 - \varphi_2),\end{aligned}\tag{36}$$

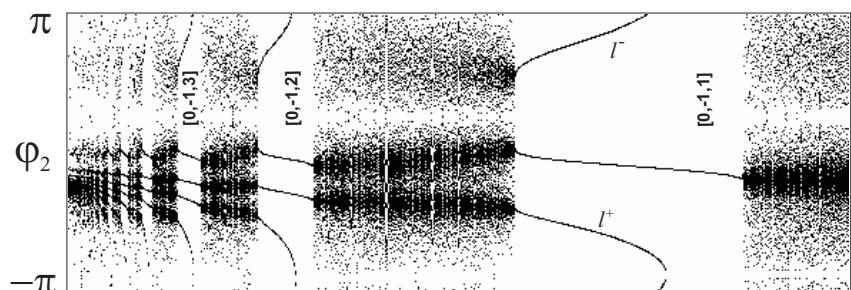
определенной на трехмерном фазовом торе T_3 и плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$. Структуры плоскости параметров моделей каскадного соединения, с ростом N ведут себя аналогично параметрическим структурам параллельного соединения, т.е. они наследуют параметрические портреты моделей меньшей размерностей, при этом сохраняются тенденции преобразования областей существования регулярных движений.

Разбиение плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$ модели (8) при увеличении N наследует структуру плоскости параметров цепочек с меньшим числом элементов, при этом бифуркационные кривые, определяющие структуру плоскости $\{\gamma, \delta\}$ в случае N при $N+1$ сохраняются. Области существования регулярных движений с ростом N разделяются областями существования квазипериодических движений, превращая однородную область периодических движений в слоистую структуру, где области существования регулярных движений перемежаются областями существования квазирегулярных движений. Данный факт наглядно демонстрирует рис. 28, 30, 29. На этих рисунках представлены области, где первые два элемента цепочки характеризуются движениями на двумерном фазовом торе T_2 типа [0,1], [1,1] и [1,0] соответственно.

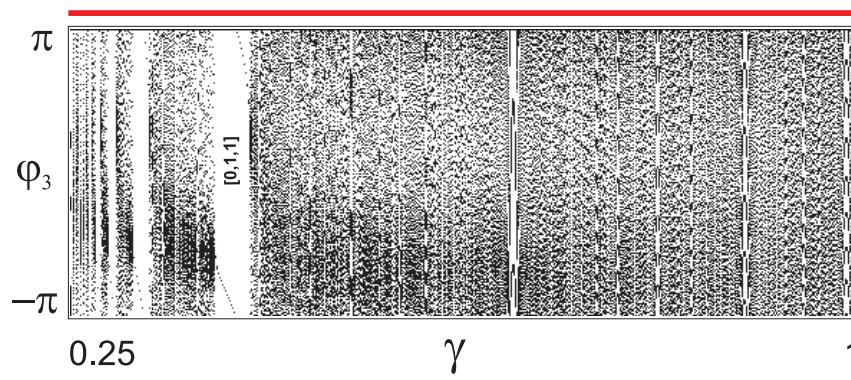
Каждая из рассмотренных областей в модели (36) разделена на области периодических и квазипериодических. Границами выделенных областей служат кривые, отвечающие бифуркации двукратного предельного цикла. Однопараметрические диаграммы отображения Пуанкаре отражают эволюцию динамических режимов.



(a)

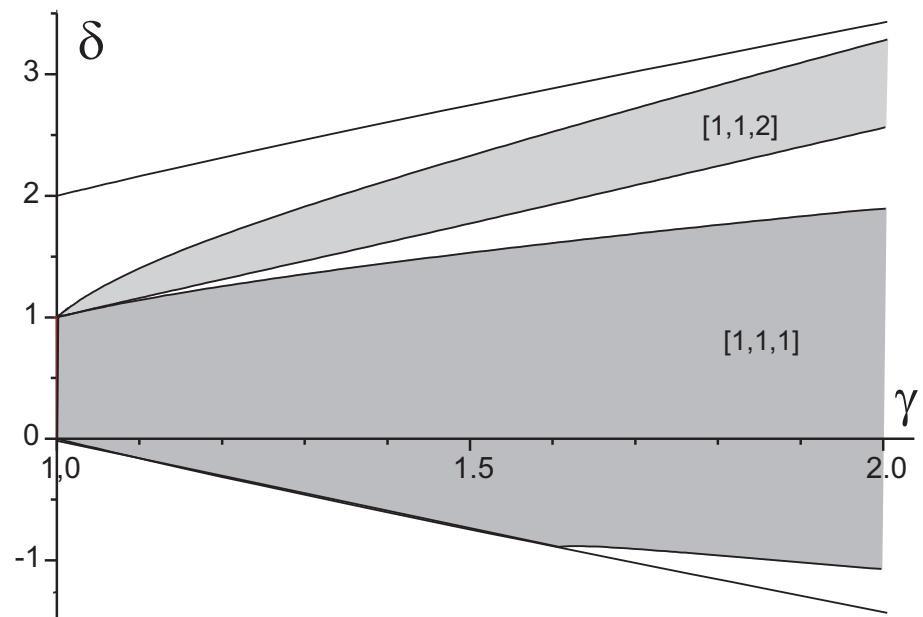


(б)

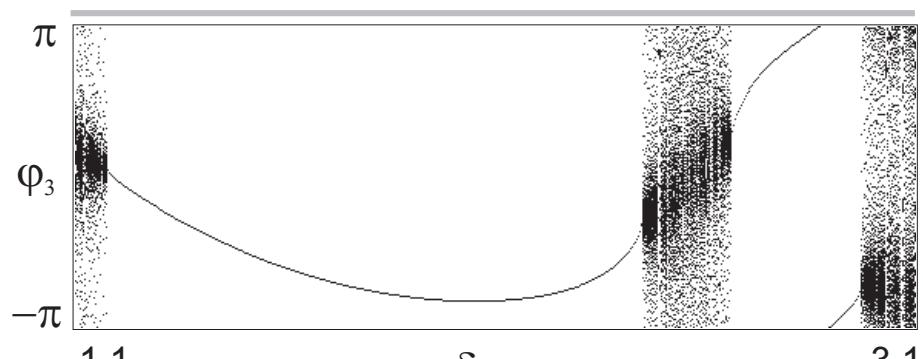


(в)

Рис. 28: Фрагменты плоскости (γ, δ) модели (36) (а); однопараметрические бифуркационные диаграммы отображения Пуанкаре модели (36) при $\gamma = 0.75$ на секущей $\varphi_3 = -\pi$ (б) и при $\delta = -3.0$ на секущей $\varphi_2 = -\pi$ (в)

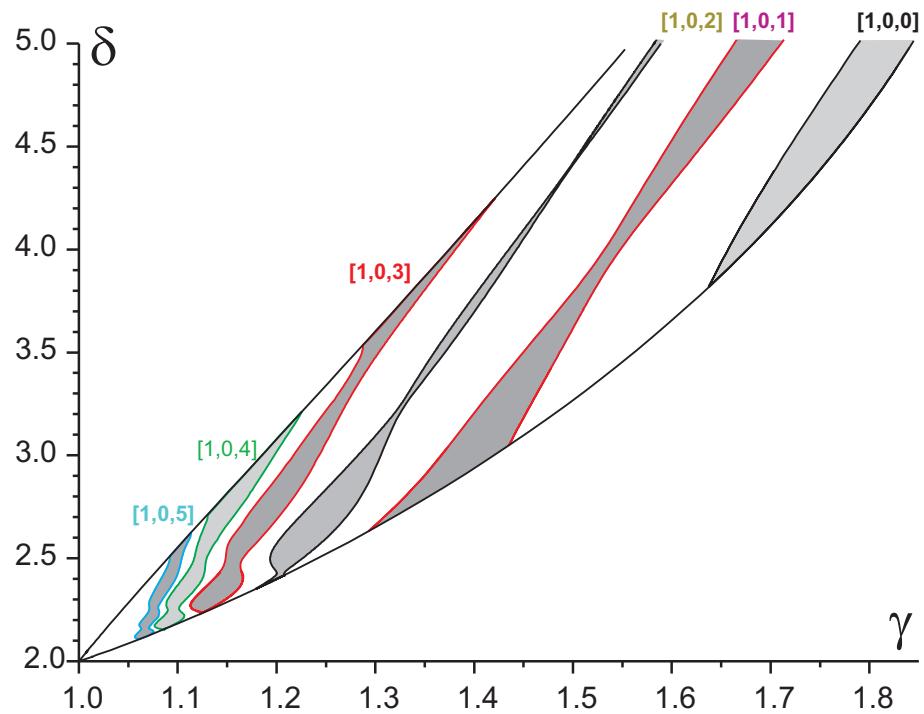


(a)

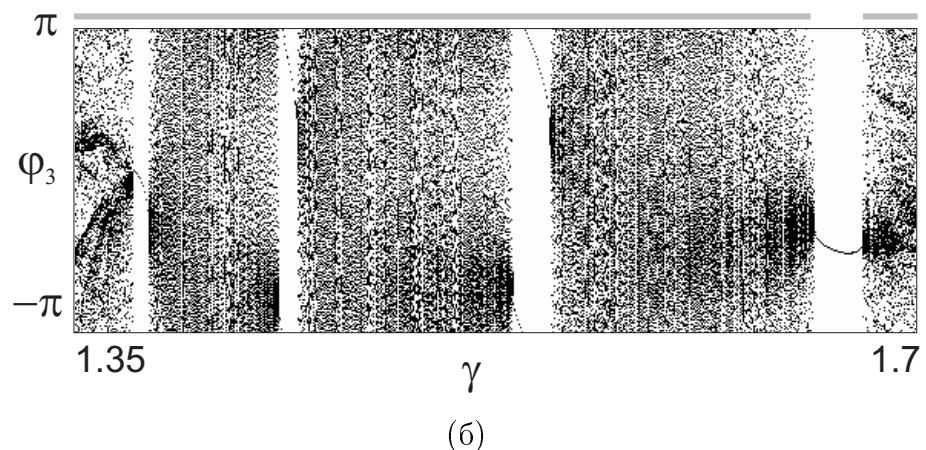


(b)

Рис. 29: Фрагменты плоскости (γ, δ) модели (36) (а); однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре модели (36) при $\gamma = 1.75$ (б)



(a)



(б)

Рис. 30: Фрагменты плоскости (γ, δ) модели (36) (а); однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре модели (36) при $\delta = 4$ (б)

Заключение

Приведены результаты исследования коллективной динамики цепочек однородно связанных систем фазовой синхронизации (фазовой автоподстройки частоты – ФАП). Рассмотрено два типа объединения фазоуправляемых генераторов в ансамбль. Параллельное объединение, когда генераторы ансамбля связаны между собой через сигналы фазовых рассогласований, и последовательное (каскадное соединение), когда выходной сигнал одного парциального элемента является входным для последующего. В случае каскадного соединения, наряду с основными связями используются дополнительные локальные связи через сигналы фазовых рассогласований «вперед» (управляющий сигнал от n -го элемента с некоторым весом δ суммируется с сигналом управления $n + 1$ -го элемента).

Изучены цепочки из идентичных систем фазовой синхронизации (однородные цепочки) первого порядка (систем фазовой синхронизации без фильтров в цепях управления, с простейшей динамикой). Проанализированы синхронные и асинхронные режимы однородной цепочки в зависимости числа N элементов цепочки и параметров модели: γ – начальной частотной расстройки и δ – силы связи. Проведенные исследования свидетельствуют, что в целом динамика рассмотренных моделей аналогична. Различия наблюдаются в размерах и расположении на плоскости параметров (γ, δ) областей с различным динамическим поведением.

Для цепочки произвольной длины N получены аналитические выражения границ областей C_S^N существования режимов глобальной синхронизации. Показано, что с ростом N область глобальной синхронизации элементов цепочки уменьшается и стягивается к области C_S^∞ фиксированного размера. Установлено, что границы областей C_S^N являются гладкими для цепочек, состоящих из нечетного числа элементов, а также для четного числа элементов, в случае антагонистических связей ($\delta < 0$). В случае кооперативных связей ($\delta > 0$) цепочки из четного числа элементов имеют изломы в точке $a(\gamma^*, \delta^*)$, при этом для $\delta < \delta^*$ границы областей C_S^N и C_S^{N-1} совпадают.

Исследованы асинхронные автоколебательные режимы. Установлено, что движения в N –мерном фазовом пространстве динамической модели могут быть периодическими и квазипериодическими. Периодические решения для отдельных элементов цепочки могут иметь весьма сложную структуру, которая определяется поведением фазовых траекторий на торoidalной фазовой поверхности и характеризуется числом вращения. Фазоуправляемые генераторы цепочки могут функционировать в квазисинхронном режиме. Таким режимам в фазовом пространстве динамической модели отвечают периодических движения, ограниченные по соответствующим фазовым переменным. Показано, что элементы рассмотренной цепочки не способны функционировать в хаотических режимах.

Обнаружено, что при движении вдоль цепочки вниз по потоку синхронный режим замещается периодическим режимом биений, далее периодический режим может замещаться как периодическим, так и квазипериодическим. Если в i -ом элементе цепочки возникает квазипериодический режим, то он сохраняется для всех элементов цепочки с номерами больше, чем i .

Проведен бифуркационный анализ моделей малых ансамблей, состоящих из двух и трех элементов. На плоскости параметров выделены области синхронных, асинхронных периодических и квазипериодических режимов. Установлено, что границами периодических режимов служат бифуркационные кривые двукратных предельных циклов, в пространстве параметров области существования периодических режимов различного типа (разными рациональными числами вращения на торе) разделяют области существования квазипериодических движений (иррациональными числами вращения). Области синхронных, периодических и квазипериодических движений в рассмотренной модели не пересекаются – режимы мультистабильного поведения отсутствуют.

Построены параметрические портреты малоразмерных систем, анализ которых позволяет не только оценить влияние параметров модели на режимы динамического поведения генераторов, но и вскрыть механизмы формирования структуры пространства параметров многомерных моделей. Установлено свойство наследования структуры пространства параметров цепочки при добавлении нового элемента.

Рассмотрена динамика параллельного соединения идентичных систем фазовой синхронизации с фильтрами первого порядка в цепях управления. Показано, что в такой цепочке могут существовать хаотические колебания, области существования различных движений модели (3) могут пересекаться, в результате в пространстве параметров возникают зоны мультистабильного поведения.

Список литературы

- [1] Henriquez P et. al. // IEEE transactions on audio, speech, and language processing, vol. 17, no. 6, 2009.
- [2] Капранов М.В. Взаимодействующие многосвязанные СФС // В сб.: Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. Гл. 4. С. 55.
- [3] Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФАН, 1989. 256 с.
- [4] Мишагин К.Г., Шалфеев В.Д., Пономаренко В.П. Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решетках. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 188 с.
- [5] Мишагин К.Г., Шалфеев В.Д. Управление градиентными фазовыми распределениями в модели активной антенной решетки с локальными связями между элементами // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 23. С. 32
- [6] Coherent laser beam combining Weinheim / edited by Arnaud Brignon. Germany: Wiley-VCH, c2013.
- [7] Matrosov V.V., Mishchenko M.A. Shalfeev V.D. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop // Eur. Phys. J. Special Topics, 2013, v.222,i.10, p. 2399
- [8] Osipov G.V., Kurths J., Zhou Ch. Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin: Springer, 2007.
- [9] Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н.Новгород. Изд-во ННГУ, 2013. 366 с.
- [10] Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Стационарные режимы в цепочке односторонне связанных систем фазовой синхронизации // Радиотехника. 1988. № 3. С. 27-38
- [11] Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. 289 с.
- [12] Лифшиц Л.М. Некоторые вопросы синхронизации разветвленных сетей передачи данных // Электросвязь. 1972. № 5. С. 44–48.
- [13] Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.

- [14] Капранов М.В. Элементы теории систем фазовой синхронизации. Уч. пособие по курсу теории колебаний. М.: изд. МЭИ, 2006
- [15] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. литературы, 1981. 568 с. 3-е изд. (2-е изд. – 1959г., 1-е изд. – 1937г.)
- [16] Белюстина Л.Н. Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты // Изв.вузов. Радиофизика, 1959, т.2, №2, с. 277-291.
- [17] Белюстина Л.Н., Белых В.Н. О глобальной структуре разбиения цилиндрического фазового пространства одной неавтономной системы //Дифференциальные уравнения, 1973, т.9, №4, с.595-608
- [18] Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д. О величине полосы захвата системы ФАП с пропорционально - интегрирующим фильтром // Изв. ВУЗ, Радиофизика, 1970, №4, с. 56
- [19] Матросов В.В. Регулярные и хаотические колебания в фазовой системе // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. № 23. С. 4–8.
- [20] Матросов В.В. Автомодуляционные режимы системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. № 4. С. 357–368.
- [21] Матросов В.В., Касаткин Д.В. Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48. № 6. С. 637–645.
- [22] Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1967.
- [23] Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005. 464 с.
- [24] Касаткин Д. В. Эффект подавления колебаний в ансамблях взаимосвязанных фазовых систем // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 6. - С. 36-43
- [25] Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.