МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Библиотека Исследовательской школы
«Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах»

К.Н. Алешин,
В.В. Матросов,
М.А. Мищенко

ДИНАМИКА МАЛЫХ АНСАМБЛЕЙ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

Учебно-методические материалы для магистрантов и аспирантов
Рекомендовано для аспирантов ННГУ, обучающихся по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия» (направленности 01.04.06 «Акустика», 01.04.03 «Радиофизика») и магистрантов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Нижний Новгород
2015

УДК 534.1 : 537.86 : 621.396

ДИНАМИКА МАЛЫХ АНСАМБЛЕЙ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ: Составители: К.Н. Алешин, В.В. Матросов, М.А. Мищенко. Учебно-методические материалы для магистрантов и аспирантов Исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 88 с.

Учебно-методические материалы предназначены для аспирантов ННГУ, обучающиеся по направлению подготовки 03.06.01 «Физика и астрономия» (специальности 01.04.03 – «Радиофизика», 01.04.06 – «Акустика») и магистрантов ННГУ, обучающиеся по направлениям подготовки 011800 – «Радиофизика», 010300 – «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Материалы знакомят читателя с математическими моделями и явлениями нелинейной динамики малых ансамблей систем фазовой синхронизации. С применением качественно-численных методов нелинейной динамики и компьютерного моделирования исследуются динамические состояния исследуемых моделей, бифуркации и эволюция динамических режимов при изменении параметров моделей.

Учебно-методические материалы подготовлены в соответствии с Программой повышения конкурентоспособности Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013 – 2020 годы и Программой развития Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского как национального исследовательского университета на 2009 –2018 годы.

© К.Н. Алешин, В.В. Матросов, М.А. Мищенко, 2015

© Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2015

Оглавление

Введение **5**

1 Система фазовой автоматической подстройки частоты **11**

1.1 Принцип фазовой автоподстройки 11

1.2 Характеристики основных элементов 13

1.3 Получение основного уравнения систем ФАП 15

1.4 Система ФАП с идеализированным фильтром 16

1.5 Система ФАП с интегрирующим фильтром 18

1.6 Система ФАП с полосовым фильтром 21

2 Объединение систем ФАП в ансамбль **24**

2.1 Каскадное соединение систем ФАП 25

2.2 Параллельное соединение систем ФАП 26

3 Системы ФАП, связанные через дополнительный фазовый дискриминатор **28**

3.1 Структурная схема и общие уравнения 28

3.2 Синхронные режимы 30

3.3 Динамика ансамбля в случае однонаправленной связи 37

3.4 Качественные структуры и бифуркации модели ансамбля с взаимными связями 38

4 Системы ФАП, объединеные в кольцо **45**

4.1 Схема и модели 45

4.2 Классификация динамических режимов 47

4.3 Ансамбль из двух элементов 49

4.3.1 Случай $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ll 1$. 50

4.3.2 Случай $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ll 1$. 51

4.3.3 Инерционные системы 56

4.4 Кольцо из трех фазовых систем 64

4.4.1 Математическая модель 64

4.4.2 Синхронные режимы 65
4.4.3 Асинхронные режимы малоинерционных систем 67
4.4.4 Инерционные системы 71
4.4.5 Дополнительные связи в малоинерционных системах 76
Заключение 82
Литература 84

Введение

Явление синхронизации широко распространено в науке, технике и обществе. Тенденция к синхронному поведению наблюдается в столь различных системах как часы, лазеры, стрекочущие сверчки, пейсмекеры сердца, нейроны, электронные генераторы и аплодирующие зрители. Такие эффекты универсальны; их можно объяснить в рамках единого подхода, основанного на современных достижениях нелинейной динамики.

Сам термин «синхронизация» произошёл от греческих слов $\sigma\upsilon\nu$: syn — общий, одинаковый и $\chi\rho o\nu o\varsigma$: chronos — время, то есть в буквальном переводе — происходящий в одно время, одновременный.

Первым обнаружил и описал явление синхронизации голландский учёный Христиаан Гюйгенс в XVII веке. Он открыл, что двое маятниковых часов, висящих на общей опоре, синхронизуются, т.е. их колебания идеально совпадают, а маятники движутся всегда в противоположных направлениях. Кроме того, если искусственно нарушить этот порядок, то подобное движение довольно быстро восстанавливалось. Гюйгенс обнаружил, что причина лежит в незаметном движении самой балки. Колебания маятника сообщают некоторое движение и самим часам, как бы тяжелы они ни были, а это движение передаётся балке. Гюйгенс назвал такое явление «симпатией часов». В современной терминологии это означает, что часы синхронизовались в противофазе за счёт связи через балку.

В середине девятнадцатого столетия Джон Вилльям Стретт, он же лорд Рэлей, следующим образом описал интересное явление синхронизации в акустической системе:

> «Когда две органные трубы с одинаковой высотой звука расположены рядом, возникают последствия, которые изредка приводят к практическим проблемам. В экстремальных случаях трубы могут заставить друг друга почти замолчать. Даже если взаимное влияние не столь сильно, то оно может, тем не менее, быть причиной того, что трубы будут звучать абсолютно в унисон, несмотря на неизбежные малые различия.»

Рэлей не только наблюдал взаимную синхронизацию, когда различные, но схо-

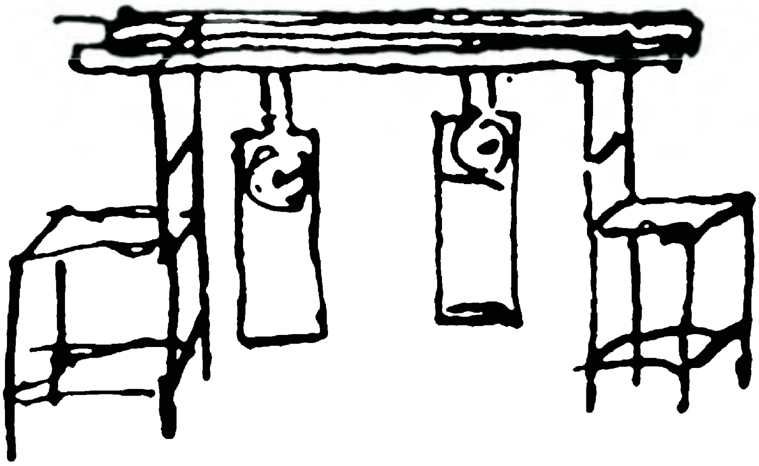


Рис. 1: Оригинальный рисунок Христиаана Гюйгенса, иллюстрирующий его эксперименты с двумя маятниковыми часами,подвешенными к общей балке.

жие, органные трубы, начинают звучать в унисон, но также и эффект гашения (вымирания) колебаний, когда связь приводит к подавлению колебаний во взаимодействующих системах.

В 1920 году В. Экклес и Дж. Винсент открыли синхронизацию триодного генератора. Экклес и Винсент связали два генератора со слегка различными частотами и продемонстрировали, что связь вынуждает системы осциллировать на общей частоте.

Несколькими годами позже Эдвард Эпплтон и Балтазар Ван-дер-Поль повторили и расширили эксперименты Экклеса и Винсента и сделали первый шаг в развитии теории этого эффекта. Они показали, что частота генератора может быть захвачена, или синхронизована, слабым внешним сигналом несколько другой частоты. Эти исследования имели огромное прикладное значение, так как триодные генераторы стали базовым элементом систем радиосвязи. Явление синхронизации использовалось для стабилизации частоты мощного генератора с помощью маломощного, но зато очень точного.

Теоретическое рассмотрение Эпплтона и Ван-дер-Поля было расширено и обосновано с точки зрения теории нелинейных колебаний А.А. Андроновым и А.А. Виттом.

Синхронизация в живых системах также известна уже несколько столетий. В 1729 Жан-Жак Дорту де Мэран сообщил о результатах своих экспериментов с фасолью. Он заметил, что листья этого растения поднимаются и опускаются в соответствии со сменой дня и ночи. Сделав это наблюдение, он поместил фасоль в тёмную комнату и обнаружил, что движение листьев продолжается и без изменения освещённости окружающей среды.

С тех пор подобные и значительно более сложные эксперименты были повторены в разных лабораториях, и теперь уже хорошо известно, что все биологические системы, от простейших и до высокоорганизованных, имеют внутренние биологические часы, снабжающие своего <владельца> информацией о смене дня и ночи. Они могут подстраивать свои циркадные ритмы (от circa = примерно и dies = день) ко внешним сигналам: если такая система полностью изолирована от окружающей среды и содержится в неизменных условиях, то их внутренний цикл может существенно отличаться от суточного.

Мы показали на нескольких примерах, что явление синхронизации встречается повсеместно, а также привели некоторую историческую справку. Как видно, синхронизация является универсальным феноменом, характерным для колебаний любой природы, и, с философской точки зрения, отображает тенденцию природы к самоорганизации. Перейдем далее к обсуждению основных понятий синхронизации.

Основные понятия синхронизации

В литературе существует множество различных определений синхронизации. Рассмотрим следующие два определения, предложенные в книгах Блехмана (1981г.) и Пиковского, Розенблюма и Куртса (2003г.):

1. *Явление синхронизации состоит в том, что несколько искусственно созданных или природных объектов, совершающих при отсутствии взаимодействия колебательные или вращательные движения с различными частотами (угловыми скоростями), при наличии подчас весьма слабых взаимодействий начинают двигаться с одинаковыми, кратными или соизмеримыми частотами (угловыми скоростями), причём устанавливаются определённые фазовые соотношения между колебаниями и вращениями*

2. *Мы понимаем синхронизацию как подстройку ритмов осциллирующих объектов за счёт слабого взаимодействия между ними*

Эксперименты показывают, что даже слабое взаимодействие может синхронизовать двое часов. Это значит, что двое неидентичных часов, которые, взятые по отдельности, имеют различные периоды, при наличии связи подстраивают свои ритмы и начинают демонстрировать колебания с общим периодом. Это явление часто и называют в терминах совпадения частот их захватом: если два неидентичных осциллятора имеющих свои собственные частоты f_1 и f_2 связываются, то они могут начать осциллировать с общей частотой. Произойдет это или нет, т.е. синхронизуются ли они, зависит от двух факторов.

1. *Сила связи*

Этот параметр характеризует, насколько слабо или сильно взаимодействие. В эксперименте не всегда ясно, как измерить эту величину. В описанном выше эксперименте Гюйгенса она сложным образом зависит от способности балки (подвеса) двигаться. Действительно, если балка абсолютно жёсткая, то движение маятников не передаётся через опору, и, следовательно, часы не могут воздействовать друг на друга. Если часы не взаимодействуют, то сила связи равна нулю. Если балка не жёсткая, а может сгибаться или продольно вибрировать, то имеет место взаимодействие.

2. *Расстройка по частоте*

Расстройка частот $\Delta f = f_1 - f_2$ характеризует, насколько различны осцилляторы. В противоположность силе связи, в экспериментах с часами расстройка может быть легко измерена или изменена. Действительно, частоту часов можно подстроить, меняя длину маятника. Используя это, мы можем выяснить, как результат взаимодействия (т.е. возникновение синхронизации часов) зависит от расстройки частот. Представим себе следующий эксперимент. Сначала поместим часы в разные комнаты и измерим их частоты f_1 и f_2. Сделав это, поместим часы на общий подвес и измерим частоты F_1 и F_2 *связанных* систем (часов). Мы можем выполнить такие измерения для различных параметров расстройки и получить зависимость $\Delta F = F_1 - F_2$ от Δf. Нарисовав эту зависимость, мы получим кривую, изображенную на рис.2. Она типична для взаимодействующих автоколебательных систем, независимо от их природы (механической, химической, электронной, и т.д.). Проанализировав эту кривую, мы видим, что, если рассогласованность автономных систем не очень велика, то частоты двух часов (двух систем) становятся равными, или **захваченными**, т.е. наступает синхронизация. В общем случае мы ожидаем, что ширина области синхронизации возрастает с увеличением силы связи.

Более детальное рассмотрение синхронных состояний показывает, что синхронизация двух часов может возникнуть в различных формах. Может случиться, что два маятника качаются сходным образом: например, они оба движутся налево, почти одновременно достигают крайнего левого положения и начинают двигаться направо, почти одновременно пересекают вертикаль, и так далее. Также возможна ситуация, при которой оба маятника всегда движутся в противоположных направлениях: когда первый маятник достигает, скажем, крайнего левого положения, второй достигает крайнего правого; когда они пересекают вертикаль, они движутся в противоположных направлениях. Чтобы описать эти два явно различных режима, введем ключевое понятие теории синхронизации, а именно понятие **фазы** осциллятора.

Мы понимаем **фазу** как **величину, которая пропорциональна доле периода и возрастает на 2π в течение одного цикла колебаний**. Фаза однозначно определяет состояние периодического осциллятора; как и время, она параметризует

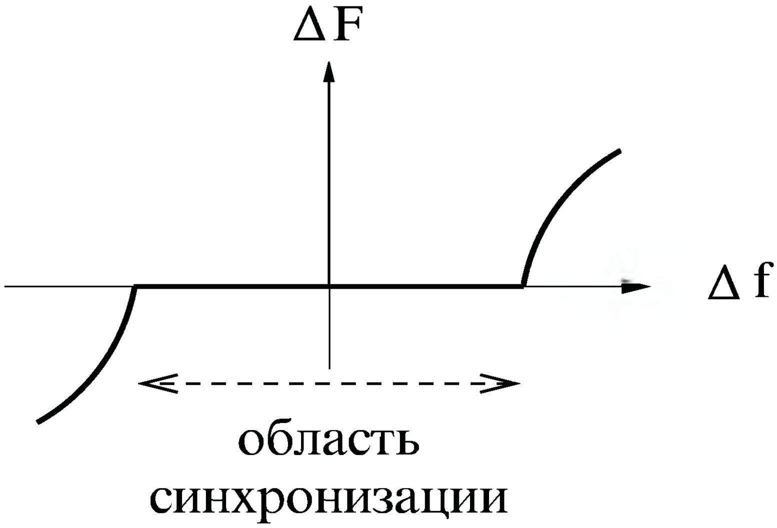


Рис. 2: График <разность наблюдаемых частот — расстройка> для некоторой фиксированной силы связи. Разность частот ΔF двух связанных осцилляторов изображена как функция расстройки (рассогласования частот) Δf несвязанных систем. В определённом диапазоне расстроек частоты связанных осцилляторов идентичны ($\Delta F = 0$), что указывает на синхронизацию.

сигнал внутри одного цикла. На первый взгляд, фаза не даёт новой информации о системе, но её преимущества становятся очевидными, если мы рассмотрим разность фаз двух часов. Это даёт возможность различить два разных синхронных режима.

Фазу можно ввести двумя различными, хотя и связанными способами. Можно считать, что она сбрасывается в ноль в начале каждого цикла, и тем самым рассматривать её на интервале от 0 до 2π; альтернативно, можно все время суммировать набег фазы и, следовательно, считать, что она растёт до бесконечности. Эти два определения почти эквивалентны, поскольку обычно важна только разность фаз.

Если два маятника движутся в одном направлении и почти одновременно достигают, скажем, крайнего правого положения, то их фазы ϕ_1 и ϕ_2 близки и такой режим называется **синфазной синхронизацией**. Если мы взглянем на движение маятников с большей точностью, то мы сможем выявить, что эти движения не в точности одновременны. Часы, которые изначально шли чуть быстрее, оказываются немного впереди других, так что обычно говорят о **фазовом сдвиге** между двумя колебаниями.

Если маятники двух синхронизованных часов движутся в противоположных направлениях, то говорят о синхронизации в **противофазе**. Опять-таки, колебания двух маятников сдвинуты не точно на половину периода — они не в точности в противофазе, а существует дополнительный малый фазовый сдвиг.

Возникновение определённого соотношения между фазами двух синхронизованных автоколебательных систем часто называют **захват фаз**.

По типу связи синхронизацию можно разделить на следующие классы:

- однонаправленная или вынужденная синхронизация, захват частоты (подстройка человеческого ритма под суточный ритм и его сбой при смене часового пояса)
- взаимная синхронизация (описанный выше случай с часами)
- автоматическая синхронизация

Первые два типа можно распространить на ансамбли связанных осцилляторов. При этом важную роль будет играть архитектура связей. В таких ансамблях может наблюдаться как полная синхронизация, так и образование групп синхронных осцилляторов — кластеризация. Исследование синхронизации в больших ансамблях осцилляторов является очень актуальной и сложной задачей современной нелинейной динамики.

Глава 1

Система фазовой автоматической подстройки частоты

Во введении было указано на особый вид синхронизации — автоматическую синхронизацию. Данный вид отличается от синхронизации внешним сигналом (захватом частоты) и взаимной синхронизации. Автоматическая синхронизация заключается в построении между двумя генераторами системы взаимодействия, которая будет осуществлять отрицательную обратную связь для управления фазой и частотой подстраиваемого генератора.

1.1 Принцип фазовой автоподстройки

Рассмотрим подробнее схему такого устройства. Принципиальная схема изображена на рис.1.1.

Основными элементами схемы являются:

- подстраиваемый генератор (Г), являющийся объектом управления. Характеристики сигнала на выходе данного генератора зависят от поступающего на него напряжения, что позволяет управлять его колебаниями;
- опорный генератор (ОГ), который служит источником эталонного сигнала;

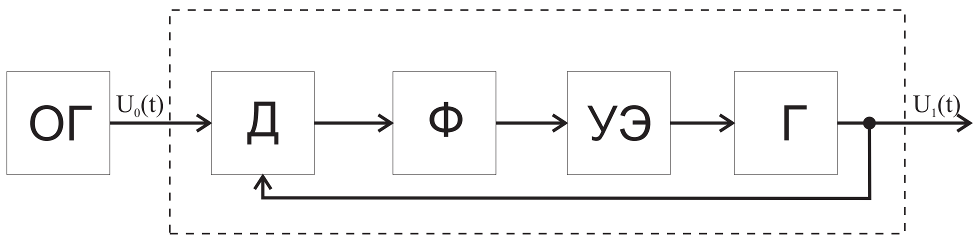


Рис. 1.1: Принципиальная схема системы автоматической синхронизации.

- дискриминатор (Д) (частотный (ЧД) или фазовый (ФД)), который сравнивает сигналы от опорного и подстраиваемого генераторов и вырабатывает сигнал, зависящий от разности фаз или частот генераторов;

- система фильтров (Ф), чаще всего фильтр низких частот (ФНЧ), пропускающий низкочастотные компоненты и подавляющий высокочастотные и шумовые;

- управляющий элемент (УЭ), преобразующий поступающий с фильтра сигнал в управляющее воздействие, подаваемое на подстраиваемый генератор.

Рассмотрим принцип работы данной схемы. Сигнал $U_1(t) = A_1 cos(\omega_1 t + \theta_1) = A_1 \sin \Phi_1(t)$ с выхода подстраиваемого генератора ПГ поступает на вход дискриминатора Д, где сравнивается с сигналом $U_0(t) = A_0 cos(\omega_0 t + \theta_0) = A_0 cos \Phi_0(t)$ опорного генератора ОГ. На выходе дискриминатора формируется сигнал ошибки, содержащий информацию о различиях между опорным и подстраиваемым генераторами. В частности, в случае фазового дискриминатора этот сигнал имеет вид $u_{PD}(t) = F(\Phi_1(t) - \Phi_0(t))$, а в случае частотного — $u_{FD}(t) = G(\omega_1 - \omega_0)$.

Далее сигнал поступает на систему фильтров Ф. Фильтр подбирается в соответствии с задачей, поставленной перед системой. В простейшем случае фильтр выделяет низкочастотную компоненту, отсекая высокочастотные шумы.

Пройдя через фильтр, сигнал ошибки оказывается на входе управляющего элемента, который необходимым образом преобразует его в соответствии с требованиями входного канала подстраиваемого генератора.

Конечным динамическим состоянием системы является соотношение $\omega_1 - \omega_0 = 0$ и $\theta_1 - \theta_0 = const$ в случае фазового дискриминатора и $\omega_1 - \omega_0 = const$ в случае частотного дискриминатора. В случае фазового дискриминатора конечное состояние называется фазовый синхронизм.

Таким образом, в случае непрерывных сигналов генераторов, петля автоподстройки частоты позволяет в реальном времени осуществлять синхронизацию двух генераторов. Кроме того, если сигнал опорного сигнала не является строго гармоническим, а содержит медленную модуляцию, то эта модуляция может передаться подстраиваемому генератору, то есть система обратной связи будет осуществлять функцию слежения.

Стоит отметить, что в литературе для систем автоподстройки частоты с фазовым детектором утвердились следующие эквивалентные названия:

- система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ или более краткое ФАП);

- система фазовой синхронизации (СФС);

- система с фазовым управлением;

- англоязычный аналог данного термина — phase-locked loop (PLL) (буквально, «петля фазовой синхронизации»).

Устройства на основе колец ФАП широко применяются для формирования и обработки радиосигналов с целью придания нужных свойств их главным параметрам — частоте и фазе. Основными задачами, решаемыми с помощью ФАП, являются достижение прецизионной стабильности центральной частоты колебаний управляемого оп частоте ПГ в условиях воздействия внешних помех $n(t)$ и внутренних дестабилизирующих факторов $\chi(t)$, а также высокоточное слежение за меняющейся во времени по некоторому закону текущей фазой $\Phi_0(t)$ (или частотой $\omega_0(t) = d\Phi_0(t)/dt$) внешнего сигнала. Кроме того, вводя в петлю обратной связи дополнительно к напряжению ошибки $u_{PD}(t)$ специальное модулирующее воздействие, можно реализовать на основе ФАП систему фазовой или частотной модуляции ПГ при сохранении высокой стабильности его центральной частоты, определяемой стабильностью частоты внешнего эталонного сигнала. Поскольку в качестве внешнего эталонного сигнала используются прецизионные кварцевые генераторы с относительной нестабильностью частоты 10^{-8} – 10^{-9}, а их мощность очень мала, то использование системы ФАП позволяет осуществить задачу усиления мощности путём управления частотой и фазой мощного подстраиваемого генератора.

1.2 Характеристики основных элементов

Реальные устройства фазовой синхронизации всегда очень разнообразны по исполнению в зависимости от конкретной технической задачи и элементной базы. Однако они всегда включают три основных элемента.

Фазовый дискриминатор

Он предназначен для преобразования разности фаз двух периодических колебаний в сигнал рассогласования в форме напряжения $u_{PD}(\varphi) \equiv e(\varphi)$. Существует большое количество различных схем ФД, простейшим является перемножитель мгновенных значений напряжений сигнала опорного генератора $U_0(t) = A_0(t) cos \Phi_0(t)$ и подстраиваемого генератора $U_1(t) = A_1(t) \sin \Phi_1(t)$:

$$e(t) = \mu U_0(t) U_g(t) = 0.5 \mu A_0(t) A_g(t) (\sin(\Phi_g(t) - \Phi_0(t)) + \sin(\Phi_g(t) + \Phi_0(t))),$$

где μ — коэффициент передачи перемножителя. Второе слагаемое в скобках быстро меняется, поскольку соответствует колебаниям на суммарной частоте; это колебание не проходит через низкочастотный фильтр и им можно пренебречь. Тогда, если обозначит разностную фазу через $\varphi(t) = \Phi_g(t) - \Phi_0(t)$, характеристика ФД-перемножителя будет иметь вид:

$$e(\varphi, t) = E(U_0(t), U_g(t)) \sin\varphi(t)$$

Видно, что в данном случае форма характеристики ФД, то есть зависимость $e(\varphi)$, синусоидальна. В некоторых других схемах ФД реализуются характеристики, близкие к пилообразным, трапецеидальным и прочим кривым, общим для которых является свойство 2π-периодичности (оно обусловлено тем, что значение гармонического колебания повторяется при значениях аргумента, отличающихся на 2π). Далее будем записывать дискриминационную характеристику любого ФД в общем и удобном виде:

$$e = E * F(\varphi),$$

где $F(\varphi) = F(\varphi + 2\pi)$ — нормированная к единице безразмерная характеристика ФД.

Фильтр низких частот

В задачах стабилизации частоты и слежения фильтр нижних частот (ФНЧ), включенный между дискриминатором и управляющим элементом, должен без ослабления пропускать к управителю частоты медленно меняющуюся часть сигнала ошибки $e(t)$, необходимый для синхронизации ПГ, и отсеивать высокочастотные компоненты, обусловленные прохождением на выход ФД помех, искажающих сигнал опорного генератора. Поэтому операторный коэффициент передачи фильтра $K(p)$ (где $p \equiv d/dt$), связывающий в символической записи мгновенные значения напряжений $e(t)$ на выходе ФД и $g(t)$ на выходе фильтра:

$$g(t) = K(p)e(t)$$

следует выбирать, исходя из предполагаемого спектра помех и требований к динамическим характеристикам ФАП как в процессе вхождения в синхронизм, так и в стационарном режиме слежения или стабилизации частоты.

В простейших задачах для подавления помех стремятся сузить полосу пропускания фильтра, использую простейшие RC-цепочки: так называемые интегрирующий фильтр (ИФ) с коэффициентом передачи $K(p) = 1/(1 + Tp)$ с постоянной времени $T = RC$ и пропорционально интегрирующий фильтр (ПИФ), для которого $K(p) = (1 + qTp)/(1 + Tp)$.

Управляющий элемент

Характеристика управляющего элемента представляет собой зависимость корректирующей частотной расстройки $\Delta\omega = \omega_g - \omega_{free}$, вносимой управителем в контур ПГ, от напряжения $g(t)$, поступающего на управляющий элемент с фильтра. Учитывая, что частота ПГ $\omega_g(t) = p\Phi_g(t)$ по определению, и принимая характеристику управляющего элемента линейной, запишем её выражение в символической форме:

$$p\Phi_g(t) = \omega_{free} - Sg(t),$$

где S — крутизна линейного участка характеристики управляющего элемента; ω_{1free} — частота свободных колебаний ПГ (при $g(t) = 0$). Знак минус взят для удобства записи окончательных формул.

Имея выражения характеристик всех основных элементов ФАП, перейдём к математическому описанию стандартной системы ФАП по структурной схеме на рис.1.1.

1.3 Получение основного уравнения систем ФАП

Будем рассматривать систему автоподстройки частоты с фазовым дискриминатором, то есть систему фазовой автоподстройки частоты.

Для описания поведения системы ФАП нужно располагать дифференциальным уравнением для текущей разности фаз $\varphi(t) = \Phi_g(t) - \Phi_o(t)$, поскольку закон изменения фазы $\Phi_o(t)$ считается известным. Составим это уравнение в общей символической записи, пригодной для любой цепи управления с символическим коэффициентом передачи фильтра $K(p)$ и произвольной 2π-периодической характеристики фазового детектора $F(\varphi)$.

Для этого подставим в выражение для управляющего элемента последовательно выражения для фильтра и фазового дискриминатора. В результате получим выражение для текущего расхождения частот ПГ и ОГ:

$$p\Phi_g(t) - p\Phi_o(t) = (\omega_{free} - p\Phi_o(t)) - SK(p)EF(\varphi). \tag{1.1}$$

Это выражение показывает, что текущая разность частот $p\Phi_g(t) - p\Phi_o(t)$ отличается от начального их отклонения $\omega_{free} - p\Phi_o(t)$ на величину поправки $SK(p)EF(\varphi)$, вносимой в подстраиваемый генератор петлей управления. Если наибольшее значение напряжения $E(A_0(t), A_g(t))$ не меняется во времени (так будет если амплитуды сигналов $A_0(t)$ и $A_g(t)$ постоянны), то $E = E^0 = const$ можем вынести перед символическим оператором $K(p)$. При этом удобно ввести в качестве *основного параметра* ФАП наибольшее значение корректирующей расстройки $\Omega = SE^0$. Используя его для нормировки, получим простую символическую запись дифференциального уравнения ФАП в безразмерной форме:

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)F(\varphi) = \gamma. \tag{1.2}$$

Здесь $\gamma = (\omega_{free} - p\Phi_o(t))/\Omega$ — безразмерная расстройка собственной частоты свободного ПГ ω_{free} относительно текущей частоты опорного сигнала $p\Phi_0$ (иногда эту величину называют начальной частотной расстройкой ФАП). Не следует путать параметр системы ФАП γ с начальным условием для разности частот ПГ и опорного сигнала $p\Phi_g(0) - p\Phi_o(0)$ в начальный момент времени $t = 0$.

Чтобы перейти от символической записи дифференциального уравнения (1.2) непосредственно к самому дифференциальному уравнению, необходимо использовать конкретный вид характеристик $K(p)$ для использующегося фильтра в петле управления и заменить в нём оператор p на символ дифференцирования, то есть $p = d/dt$, $p^2 = d^2/dt^2$ и т.д. При этом нужно помнить, что правая часть (1.2) может быть явной функцией от времени, т.е. $\gamma = \gamma(t)$, если из-за быстрых дестабилизирующих факторов меняется частота $\omega_{free} = \omega_{free}(t)$ или непостоянна частота опорного сигнала $p\Phi_0(t) \equiv \omega_0(t) \neq const$.

1.4 Система ФАП с идеализированным фильтром

Рассмотрим простейший вариант системы фазовой автоподстройки частоты в случае идеализированного фильтра с коэффициентом передачи $K(p) = 1$. Для определённости рассмотрим синусоидальную характеристику фазового дискриминатора, то есть $F(\varphi) = \sin(\varphi)$. После подстановки указанных выражений в формулу (1.2) получаем следующее выражение:

$$\dot{\varphi} + \sin\varphi = \gamma. \tag{1.3}$$

Получившееся нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка описывает динамику разности фаз двух генераторов. Очевидно, что для осуществления синхронности (квазисинхронности) двух генераторов должно выполняться условие постоянства (ограниченности) разности фаз, то есть $\varphi = const$. В свою очередь, это соответствует существованию устойчивого состояния равновесия в динамической системе (1.3). Исследуем данную систему методами теории колебаний.

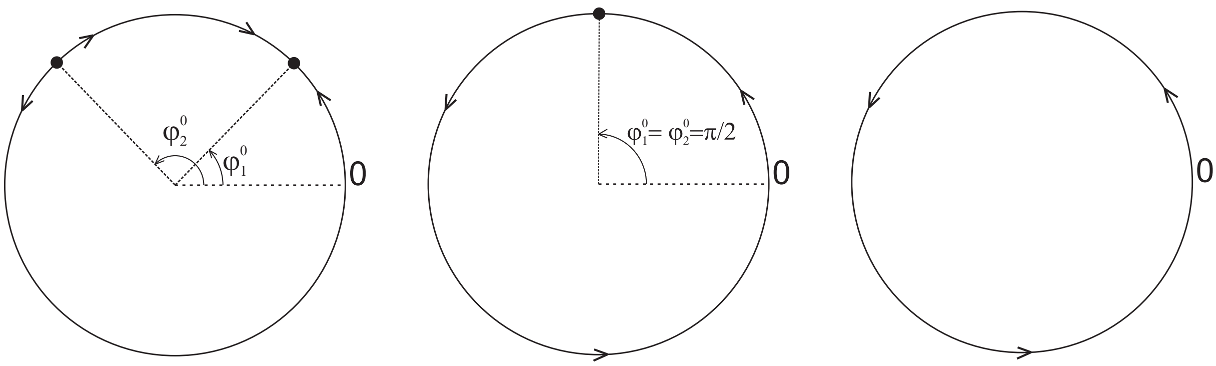
Динамическая система (1.3) представляет собой нелинейную автономную систему первого порядка с непрерывным временем. Фазовая переменная φ определена в одномерном фазовом пространстве, то есть на прямой, которая в силу 2π-периодичности может быть преобразована в фазовую окружность. Из условия нахождения состояния равновесия $\dot{\varphi} = 0$ получаем уравнение $\sin\varphi = \gamma$.

В зависимости от значения параметра γ возможно несколько случаев решения полученного уравнения. Рассмотрим положительные значения параметра γ.

1. $\underline{0 < \gamma < 1}$.

   В этом случае уравнение $\sin\varphi = \gamma$ имеет два корня: $\varphi_1^0 = \arcsin\gamma$ и $\varphi_2^0 = \pi - \arcsin\gamma$. Найденные корни соответствуют состояниям равновесия динамической системы (1.3). При этом состояние равновесия $\varphi = \varphi_1^0$ оказывается устойчивым, а состояние $\varphi = \varphi_2^0$ — неустойчивым. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис.1.2(а).

   Таким образом при $0 < \gamma < 1$ наблюдается синхронизация опорного и подстраиваемого генераторов с разностью фаз между ними $\varphi = \arcsin\gamma$.



(а) (б) (в)

Рис. 1.2: Фазовые портреты системы ФАП (1.3) для: (а) $0 < \gamma < 1$; (б) $\gamma = 1$; (в) $\gamma > 1$

2. $\underline{\gamma = 1}$.

   По мере приближения значения параметра γ к 1 значения состояний равновесия $\varphi_1^0 = \arcsin\gamma$ и $\varphi_2^0 = \pi - \arcsin\gamma$ приближаются к $\pi/2$. При $\gamma = 1$ происходит слияние состояний равновесия $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = \pi/2$ и образуется негрубое полуустойчивое состояние равновесия. Фазовый портрет для такого случая представлен на рис.1.2(б).

   Это соответствует тому, что при одних начальных условиях между системами устанавливается синхронный режим с разностью фаз $\pi/2$, а при других — $5\pi/2$, что эквивалентно первому случаю, но занимает большее время установления синхронизации.

3. $\underline{\gamma > 1}$

   При дальнейшем увеличении значения параметра γ уравнение $\sin\varphi = \gamma$ не имеет корней, соответственно производная $\dot{\varphi}$ нигде не обращается в 0 и всюду

$\dot{\varphi} = \gamma - \sin\varphi > 0$. Это свидетельствует о том, что в системе не устанавливается синхронизация, разность частот опорного и подстраиваемого генераторов не обращается в 0, а их разность фаз φ неограниченно нарастает во времени. Такой режим называют *асинхронным* или *режимом биений*. Фазовый портрет в таком случае тривиален и представлен на рис.1.2(в).

1.5 Система ФАП с интегрирующим фильтром

Обратимся к исследованию системы фазовой синхронизации с инерционными цепями управления. Такие ФАП, естественно, обладают более сложной динамикой. Основное внимание обратим на случай типового интегрирующего и пропорционально-интегрирующего фильтров в цепях управления ФАП.

Рассмотрим случай наличия в ФАП интегрирующего RC-фильтра $K(p)$=$(1 + Tp)^{-1}$. В этом случае уравнение (1.2) после введения безразмерного времени $\tau = t\sqrt{\Omega/T}$ принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \lambda\frac{d\varphi}{d\tau} + \sin\varphi = \gamma. \tag{1.4}$$

Здесь введен параметр $\lambda = 1/\sqrt{\Omega T}$. Наряду с параметром λ здесь и далее будет употребляться параметр $\varepsilon = \Omega T = \lambda^{-2}$. Уравнение (1.4) можно переписать в виде системы

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \qquad \frac{dy}{d\tau} = \gamma - \lambda y - \sin\varphi. \tag{1.5}$$

Система (1.5) хорошо изучена в нелинейной теории колебаний [18]. На рис. 1.3а дано разбиение плоскости параметров на области D_1, D_2, D_3, соответствующие различным режимам работы. Расположение фазовых траекторий на фазовой поверхности (φ, y) для значений параметров, удовлетворяющих областям D_1, D_2, D_3, представлено на рис. 1.3б, в,г соответственно. На фазовом цилиндре при $\gamma < 1$ есть два состояния равновесия с координатами $\varphi^s = \arcsin\gamma, y^s = 0$ и $\varphi^u = \pi - -\arcsin\gamma, y^u$=0. Для параметров, принадлежащих области D_1, при любых начальных условиях на фазовом цилиндре изображающая точка с ростом времени приходит в устойчивое состояние равновесия $O_1(\varphi^s, y^s)$ (за исключением сепаратрис S_2, S_4, входящих в седло $O_2(\varphi^u, y^u)$). Для параметров, принадлежащих области D_2, в зависимости от начальных условий изображающая точка на поверхности (φ, y) с ростом времени либо стремится к устойчивому состоянию равновесия, либо к устойчивому предельному циклу (рис. 1.3в). Области D_1 и D_2 разделяет кривая $\gamma = \gamma^*(\varepsilon)$. Значения параметров, удовлетворяющие кривой $\gamma^*(\varepsilon)$, являются бифуркационными, соответствующими петле сепаратрис седла $O_2(\varphi^u, y^u)$, образующейся от слияния сепаратрис S_1 и S_2. Прямая $\gamma = 1$ на плоскости (γ, ε) также является бифуркационной, соответствующей

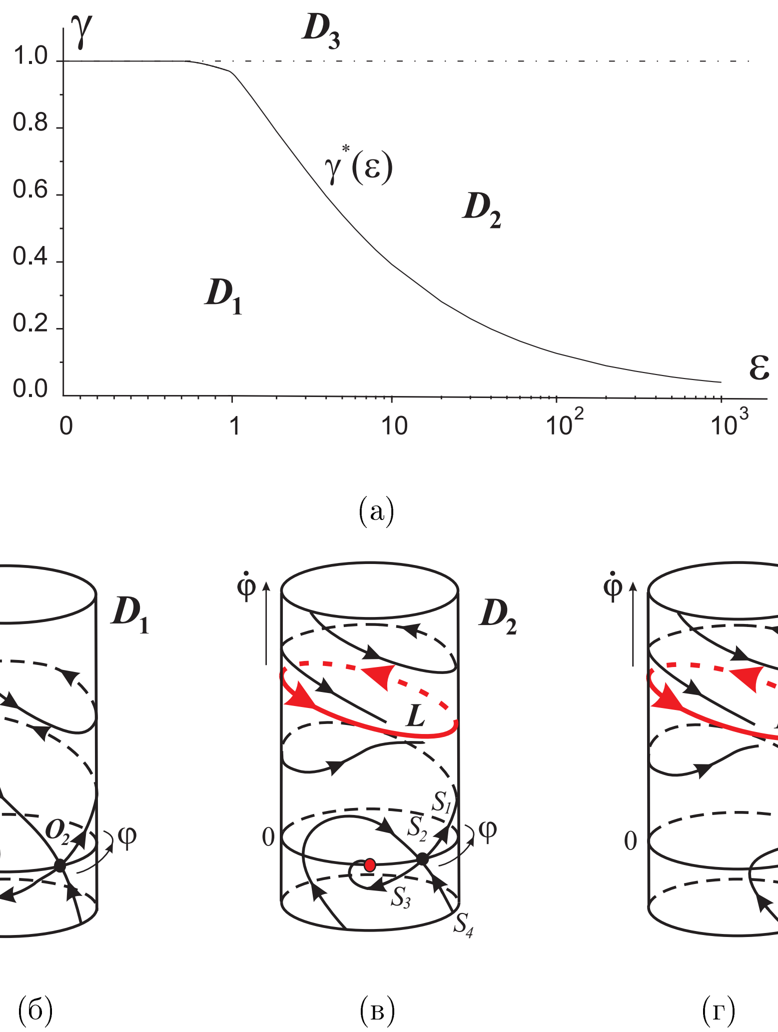


Рис. 1.3: Параметрический (а) и фазовые (б–г) портреты модели (1.5)

образованию седло-узла от слияния устойчивого O_1 и неустойчивого O_2 состояний равновесия. Часть кривой $\gamma = 1$, прилегающей к оси $\varepsilon = 0$, отвечает бифуркации петли сепаратрис седло-узла.

Таким образом, область D_1 является областью параметров, для которых в системе при любых начальных условиях устанавливается режим синхронизма. Границу этой области образуют прямая $\gamma = 1$ и кривая $\gamma = \gamma^*(\varepsilon)$. Очевидно, что для приложений важно знать достаточно точно расположение кривой $\gamma^*(\varepsilon)$ на плоскости (ε, γ). Многие авторы, начиная с Трикоми, исследовавшие уравнение маятника (1.4), предлагали различные приближенные построения кривой $\gamma = \gamma^*(\varepsilon)$ [17, 19]. Сейчас более естественно использовать для этого ЭВМ.

Бифуркационные значения можно получить с высокой точностью [20] путем непосредственного построения на ЭВМ сепаратрис S_1 и S_2 седла $O_2(\varphi^u, y^u)$. Идея определения бифуркационных значений, соответствующих петле сепаратрисы седла, с помощью приближенного построения сепаратрис впервые применялась для ФАП, по-видимому, Баталовой З.С., Белюстиной Л.Н. [19], затем развивалась в целом ряде работ [20,21]. Применение этого способа позволило получить с высокой точностью графики полосы захвата (в случаях, когда она определяется бифуркацией петли сепаратрис седла) для целого ряда моделей ФАП [22–27], полученные графики вошли в ряд монографий, например [28–30].

Результаты анализа параметрических и фазовых портретов (рис. 1.3) позволяют построить зависимость установившейся частотной расстройки y_0 от начальной расстройки γ. Эта зависимость представлена на рис. 1.4. Она показывает, что при

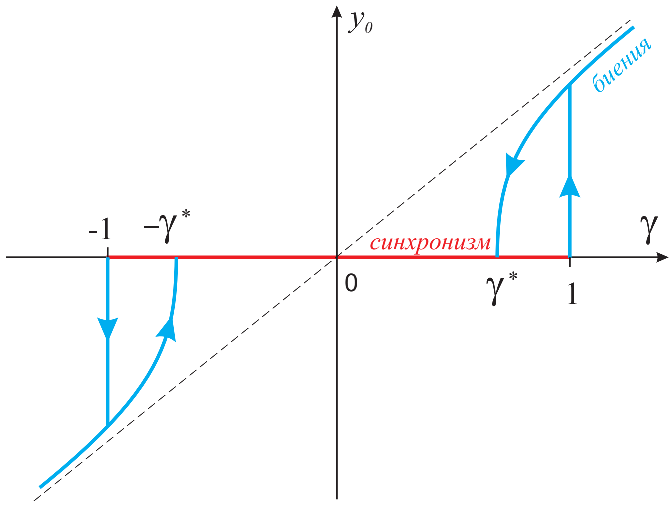


Рис. 1.4: Зависимость установившейся частотной расстройки от начальной для модели (1.5)

медленном, квазистатическом увеличении начальной расстройки γ от нуля до единицы имеет место режим синхронизма с нулевой установившейся разностью частот. При достижении $\gamma = 1$ происходит срыв синхронного режима, и устанавливается режим биений (кривая для $\gamma > 1$ дана условно). Расстройку $\gamma = 1$ называют полосой синхронизма. При уменьшении начальной расстройки γ захват в режим синхронизма происходит при значении $\gamma = \gamma^* < 1$. Эту расстройку называют полосой захвата $\gamma_{\text{захв}}$. В рассматриваемом случае полоса захвата определяется бифуркацией петли сепаратрисы седла $\gamma_{\text{захв}} = \gamma^*$. Фактически имеет место гистерезисная ситуация ($\gamma_{\text{захв}} < \gamma_{\text{синхр}} = 1$), иллюстрируемая графиком рис. 1.4 (вне полосы захвата в режиме биений кривая $y_0(\gamma)$ дана условно).

Таким образом, введение RC-фильтра в цепь управления системы ФАП привело к уменьшению полосы частот, обеспечивающей гарантированно установление режима синхронизма при любых начальных условиях, то есть привело к наличию гистерезиса ($\gamma_{\text{захв}} < \gamma_{\text{синхр}} = 1$). Следует ожидать, что применение в кольце ФАП более сложных фильтров, чем интегрирующий, может привести к такому усложнению динамики, при котором полоса захвата будет определяться не только бифуркацией петли сепаратрис седла, но и другими, более сложными, бифуркациями, например, связанными с рождением предельных циклов из сгущения траекторий.

1.6 Система ФАП с полосовым фильтром

В качестве примера системы ФАП третьего порядка рассмотрим предложенную в работах [49–51] систему с разделительной ёмкостью в цепи управления. В случае включения конденсатора в цепь управления образуется фильтр верхних частот. Такой тип фильтров применяется, к примеру, в импульсных системах ФАП для изоляции управляющего элемента по постоянному току от выхода фазового детектора. Коэффициент передачи фильтра в данной ситуации имеет вид

$$K(p) = \frac{T_1 p}{1 + T_1 p} * \frac{1}{1 + T_2 p} = \frac{T_1 p}{1 + (T_1 + T_2) + T_1 T_2 p^2},$$

где T_1 и T_2 — постоянные времени фильтров верхних и нижних частот соответственно. Тогда система (1.2) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) z - (1 + \varepsilon_1 \cos\varphi), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\tau = \Omega t$ — безразмерное время, $\varepsilon_1 = T_1 \Omega$ и $\varepsilon_2 = T_2 \Omega$ — параметры инерционности фильтров. Система (1.6) определена в автономном цилиндрическом фазовом пространстве $U = (\varphi(mod 2\pi), y, z)$.

В такой системе отсутствуют состояния равновесия, но установлено существование предельного цикла, который при изменении параметров системы может менять период, кратность и превращаться в хаотический аттрактор. Как установлено в [52], реализующиеся в такой системе режимы качественно отображают некоторые режимы изменения мембранного потенциала нейрона, например регулярную импульсную активность и пачечные разряды с различным числом импульсов в пачке, а также квазихаотические колебания. Поэтому такую систему фазовой синхронизации можно рассматривать как модель нейрона.

На рис.1.5 представлены примеры аттракторов и осциллограмм модели (1.6), характеризующие различные динамические режимы. Периодическую активность нейрона иллюстрирует рис.1.5а, пачечную активность — рис.1.5б–е. Для регулярных движений количество импульсов в пачке совпадает с кратностью предельного цикла. Будем называть пачечные режимы соответственно $<1>$ (рис.1.5б), $<2>$ (рис.1.5в), $<3>$ (рис.1.5г) и так далее. На рис.1.5е представлен режим пачечной активности,

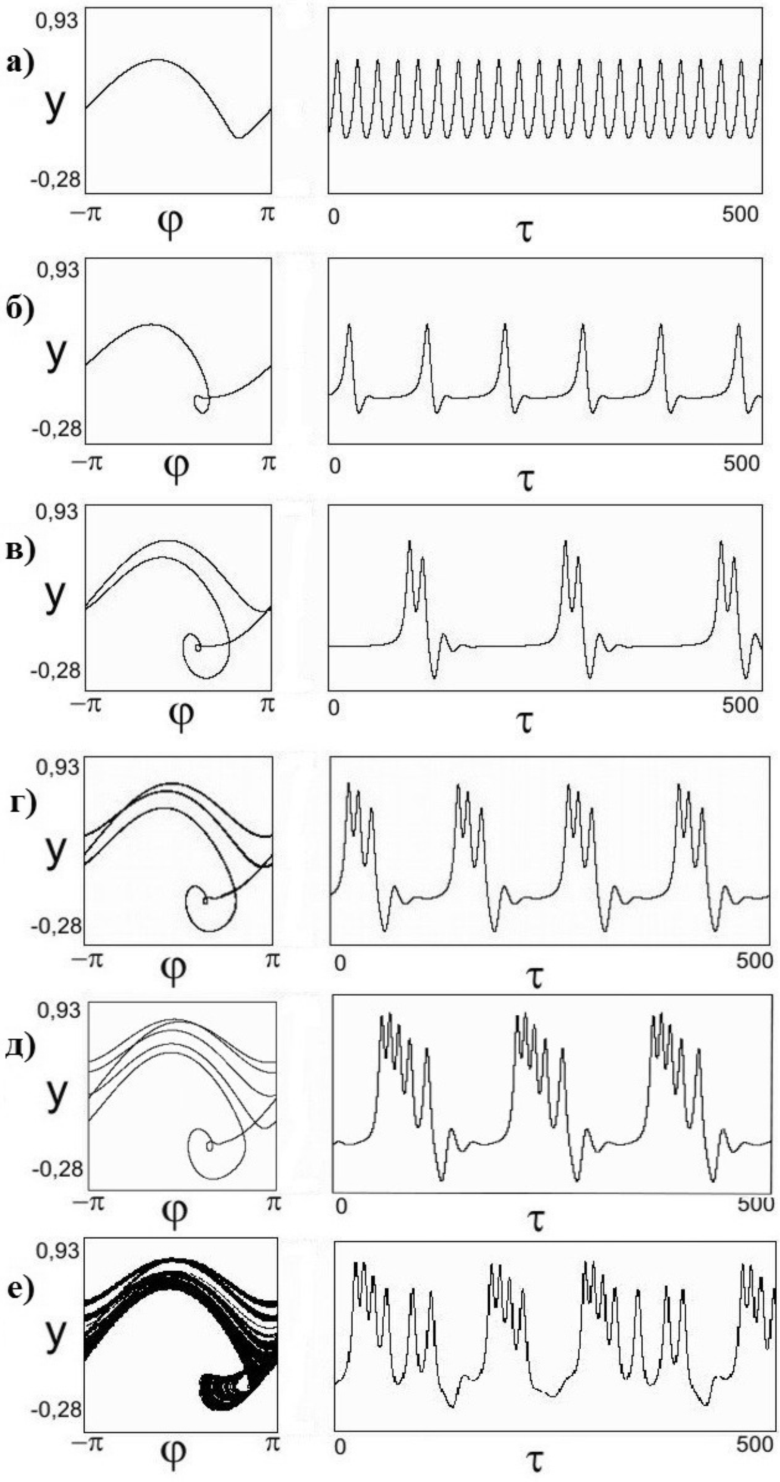
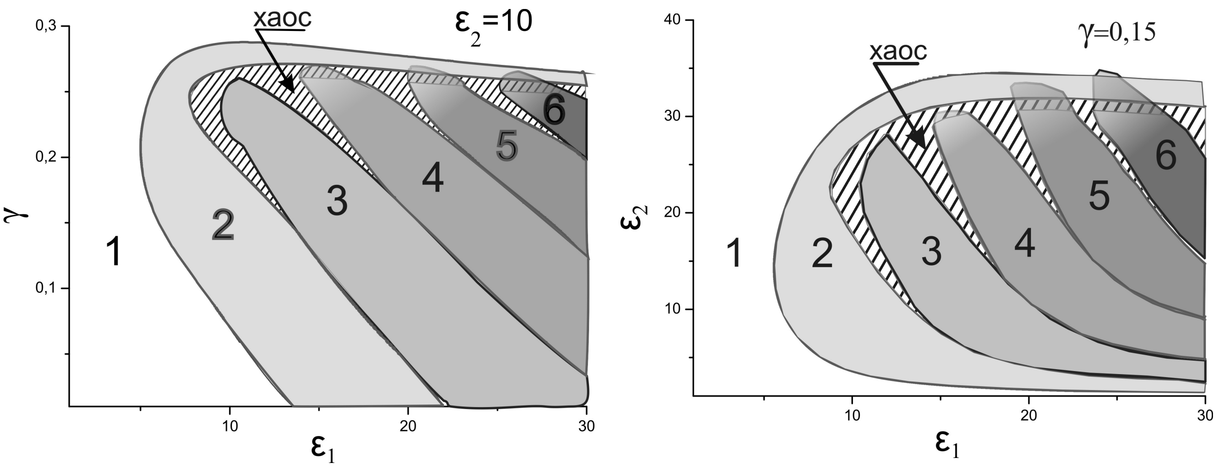


Рис. 1.5: Проекции аттракторов и осциллограммы модели (1.6)

когда вместо предельного цикла имеет место хаотический аттрактор. В этом случае число импульсов в пачке есть случайная величина.

Все приведенные режимы реализуются в модели (1.6) при изменении параметров γ, ε_1, ε_2, в результате чего имеется возможность регулировать количество импульсов в пачке, интервалы между пачками, амплитуду импульсов.

На рис.1.6 представлены разбиения сечений (ε_1, γ) и $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ пространства пара-



(а) (б)

Рис. 1.6: Структуры сечений пространства параметров модели (1.6) при $\varepsilon_2 = 10$(а) и $\gamma = 0.15$(б)

метров модели (1.6) на области с различным динамическим поведением. Внутри каждой области реализуется один из возможных режимов. В области **1** реализуется режим периодической активности (рис.1.5а) и пачечный режим $<1>$ с одним импульсом в пачке (рис.1.5б), в области **2** — режим $<2>$ (рис.1.5в), в области **3** — режим $<3>$ (рис.1.5г) и так далее. Области параметров, где реализуются хаотические режимы (рис.1.5е) на рис.1.6 отмечены штриховкой. При изменении параметров модели внутри области тип режима сохраняется, меняются только характеристики колебаний (интервал между пачками, амплитуда и т.д.). Из рис.1.6 видно, что области существования различных режимов могут перекрываться, порождая области мультистабильного поведения.

Глава 2

Объединение систем ФАП в ансамбль

Объединение двух или нескольких фазовых (частотных) систем в ансамбль возникает достаточно часто. Способы объединения систем в ансамбль могут быть различными. Возникающие в результате объединения новые свойства расширяют функциональные возможности этих систем как в традиционных направлениях (как управляемых по частоте генераторов периодических сигналов), так и в нетрадиционных направлениях (как генераторов хаотических сигналов). На практике к объединению рассматриваемых систем в ансамбли прибегают, например, для разрешения противоречивых требований, предъявляемых к различным характеристикам систем – полосе захвата, фильтрующим свойствам, быстродействию, вероятности срыва слежения и т.д. [14–16, 31]. Существует также ряд задач, где принципиально необходимо объединение нескольких систем в ансамбль [3, 16, 32–41], например, оптимальный прием и оценка параметров сложных сигналов. Что касается новых приложений, в частности, для хаотических систем связи, то здесь наибольший интерес представляют реализующиеся в ансамблях сложные хаотические автомодуляционные колебания. Заметим, что динамические свойства автогенераторных систем определяются не только параметрами самих систем, но и структурой и силой связей между системами, что позволяет использовать параметры связей как управляющие параметры.

Следует отметить, что рассматриваемые ансамбли взаимосвязанных управляемых генераторов являются одним из видов многоэлементных автоколебательных систем, к которым в настоящее время проявляется большой интерес не только в радиофизике, но и в биологии, химии, экономике и т.д. [3, 42, 43]. Нелинейные явления коллективной динамики, демонстрируемые такими моделями (процессы синхронизации, автоколебательные регулярные и хаотические режимы), во-первых, имеют большое значение для установления основных закономерностей динамического поведения взаимосвязанных частотно- и фазоуправляемых генераторов, а во-вторых, могут быть полезными при исследовании других объектов (многоэлементных фазированных антенных решеток, джозефсоновских соединений, энергетических сетей, систем пространственно-временной обработки и т.д.).

2.1 Каскадное соединение систем ФАП

Обратимся к анализу ансамбля, образованного каскадным соединением фазовых систем. При каскадном соединении систем ФАП в ансамбль выход предыдущей системы является входом последующей [44]. Для каскадного соединения систем ФАП типичным является использование единственного внешнего сигнала. Упоминание о целесообразности каскадного соединения систем встречается в [16]. С помощью такого соединения ФАП можно улучшить фильтрацию помех. Действительно, поскольку каждую систему ФАП можно рассматривать как некоторый фильтр для сигнала, поступающего на ее вход, то при последовательном соединении фильтрующая способность цепочки фильтров будет выше, чем у одного элемента цепочки. Наличие локальных цепей управления позволяет организовывать дополнительные связи между элементами цепочки и, тем самым, не только изменять динамические свойства объединяемых систем, но и управлять этими свойствами посредством изменения параметров связей. На рис. 2.1 представлена структурная схема ансамбля двух кас-

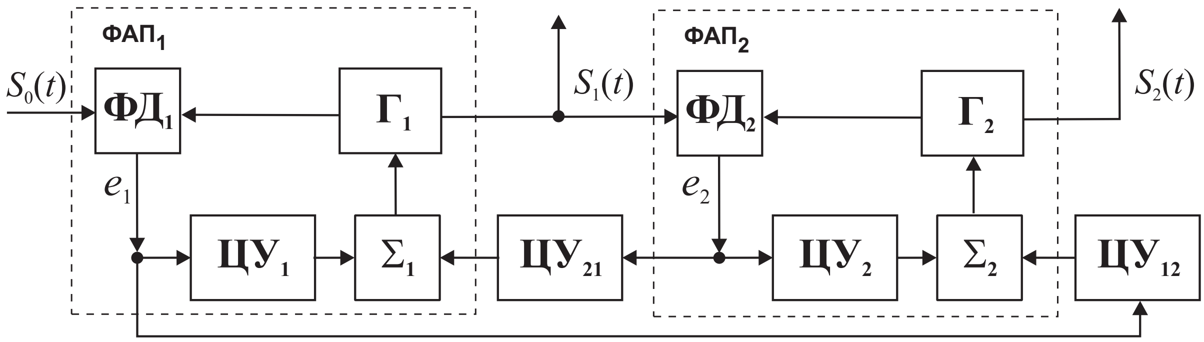


Рис. 2.1: Каскадное соединение двух систем ФАП

кадно связанных систем ФАП. Здесь внешним сигналом является опорный сигнал $S_0(t)$, который поступает на вход системы ФАП$_1$, сигнал $S_1(t)$ с выхода системы ФАП$_1$ является входным для системы ФАП$_2$. Парциальные системы ФАП$_1$ и ФАП$_2$ могут обмениваться информацией о возникающих в них сигналах ошибок e_1 и e_2 через цепи взаимного управления ЦУ$_{12}$ и ЦУ$_{21}$. Цепь управления ЦУ$_{12}$ реализует дополнительную связь «вперед», передавая информацию с выхода фазового дискриминатора ФД$_1$ в локальную цепь управления системы ФАП$_2$. Цепь управления ЦУ$_{21}$ реализует дополнительную связь «назад», передавая информацию с выхода фазового дискриминатора ФД$_2$ в локальную цепь управления системы ФАП$_1$. Сигналы в цепях управления ЦУ$_{12}$ и ЦУ$_{21}$ могут преобразовываться – усиливаться или ослабляться и проходить через дополнительные фильтры.

Уравнения, описывающие динамические процессы в рассматриваемой каскадной системе, составляются из общих уравнений взаимосвязанных систем синхронизации, введенных в [45]. Общие уравнения обычно записываются в операторной форме и для каскадного соединения двух ФАП имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{p\psi_1}{\Omega_1} &= \gamma_1 - K_1(p)F_1(\psi_1) - \kappa K_{21}(p)F_2(\psi_2), \\ \frac{p\psi_2}{\Omega_1} &= \gamma_2 - bK_2(p)F_2(\psi_2) - \delta K_{12}(p)F_1(\psi_1) - \frac{p\psi_1}{\Omega_1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{p\varphi_1}{\Omega_1} &= \gamma_1 - K_1(p)F_1(\varphi_1) - \kappa K_{21}(p)F_2(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{p\varphi_2}{\Omega_1} &= \gamma_2 - bK_2(p)F_2(\varphi_2 - \varphi_1) - \delta K_{12}(p)F_1(\varphi_1). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $p \equiv d/dt$, $\psi_1 = \varphi_1 = \theta_1 - \theta_0$ – текущее фазовое рассогласование между сигналом первого генератора и опорным сигналом, $\psi_2 = \theta_2 - \theta_1$ – текущее фазовое рассогласование между сигналами первого и второго генераторов, $\varphi_2 = \psi_1 + \psi_2 = \theta_2 - \theta_0$ – текущее фазовое рассогласование между сигналом второго генератора и опорным сигналом, γ_1 и γ_2 – начальные расстройки частот первого и второго генераторов относительно опорного сигнала, $b = \Omega_2/\Omega_1$, где Ω_1 и Ω_2 – полосы удержания парциальных систем ФАП$_1$ и ФАП$_2$, $F_1(\psi_1)$ и $F_2(\psi_2)$ – нормированные характеристики фазовых дискриминаторов ФАП$_1$ и ФАП$_2$, $K_1(p)$, $K_2(p)$ и $K_{12}(p)$, $K_{21}(p)$ – передаточные функции фильтров низких частот в локальных цепях управления ФАП$_1$, ФАП$_2$ и в цепях дополнительных связей «вперед» и «назад», δ и κ – параметры преобразования сигналов рассогласований между генераторами в прямом и обратном направлениях соответственно. Подставляя в уравнения (2.1) или (2.2) конкретные выражения коэффициентов передач фильтров, характеристик фазовых дискриминаторов, можно получить разнообразные математические модели двухкаскадной взаимосвязанной ФАП.

2.2 Параллельное соединение систем ФАП

Рассмотрим другой вариант объединения двух фазовых систем в ансамбль – параллельное соединение. Структурная схема одного из вариантов ансамбля двух параллельно связанных ФАП (ПФАП) представлена на рис. 2.2. Здесь опорным сигналом для обоих управляемых генераторов ансамбля является сигнал $S_0(t)$. Он поступает на фазовые дискриминаторы ФД$_1$ и ФД$_2$, где сравнивается с сигналами $S_1(t)$ и $S_2(t)$

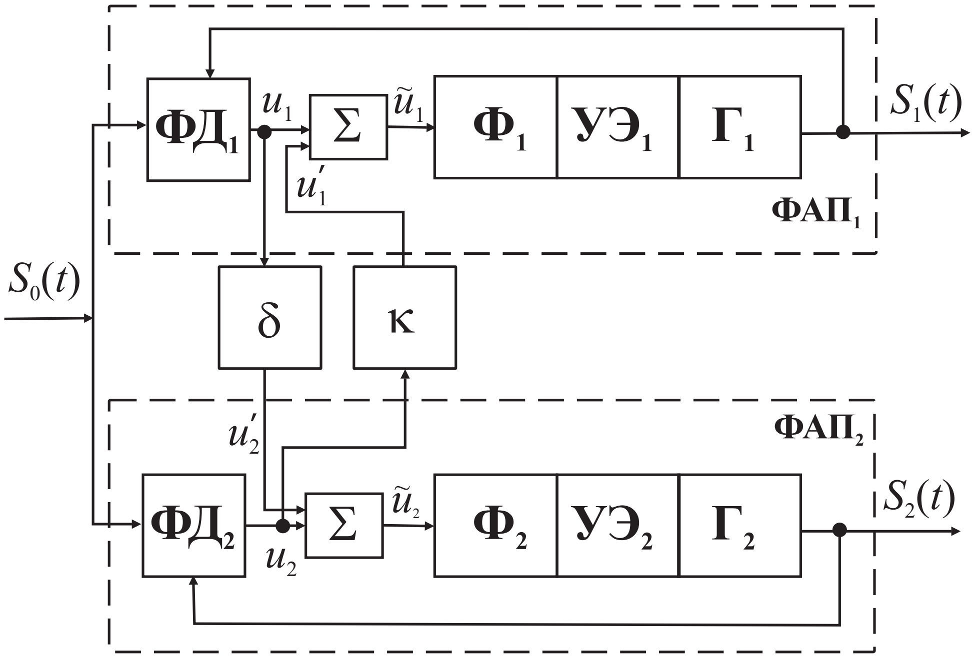


Рис. 2.2: Параллельное соединение двух систем ФАП

управляемых генераторов Γ_1 и Γ_2 соответственно. На выходе ФД_1 и ФД_2 вырабатываются напряжения u_1 и u_2 пропорциональные разности фаз колебаний управляемых генераторов и опорного сигнала. Далее сигналы фазовых рассогласований u_1 и u_2 поступают на сумматоры Σ, где суммируются с сигналами связей $u_1' = \kappa u_2$ и $u_2' = \delta u_1$. Суммарные сигналы $\tilde{u}_1{=}u_1 + \kappa u_2$ и $\tilde{u}_2{=}u_2 + \delta u_1$ используются для управления частотами генераторов Γ_1 и Γ_2. Операторные уравнения, описывающие динамику такой системы, имеют вид [3, 45]

$$\begin{aligned} \frac{p\varphi_1}{\Omega_1} &= \frac{\Omega_1^0}{\Omega_1} - K_1(p)[F(\varphi_1) + \kappa F(\varphi_2)], \\ \frac{p\varphi_2}{\Omega_1} &= \frac{\Omega_2^0}{\Omega_1} - bK_2(p)[F(\varphi_2) + \delta F(\varphi_1)], \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $p \equiv d/dt$, φ_i – текущее фазовое рассогласование между опорным сигналом и сигналом i-го генератора, Ω_i^0 – начальная частотная расстройка i-го управляемого генератора относительно опорного сигнала, $b = \Omega_2/\Omega_1$, Ω_i – полоса удержания ФАП_i, $K_i(p)$ – коэффициент передачи фильтра нижних частот Φ_i, $F(\varphi_i)$ – нормированная характеристика i-го фазового дискриминатора ($i = 1, 2$), κ и δ – параметры связей.

Заметим, что в модель (2.3) могут быть внесены изменения, связанные с учетом инерционности канала связи, учетом других вариантов реализации связей (суммирование сигналов на входе управителя, а также осуществление связи через дополнительный фазовый или частотный дискриминаторы, сравнивающие колебания с выходов генераторов Γ_1 и Γ_2, и т.д.).

Глава 3

Системы ФАП, связанные через дополнительный фазовый дискриминатор

3.1 Структурная схема и общие уравнения

Рассмотрим ансамбль, состоящий из двух типовых систем фазовой автоподстройки частоты (ФАП), которые связаны между собой через дополнительный фазовый дискриминатор. Структурная схема такого ансамбля представлена на рис.3.1. Опорным

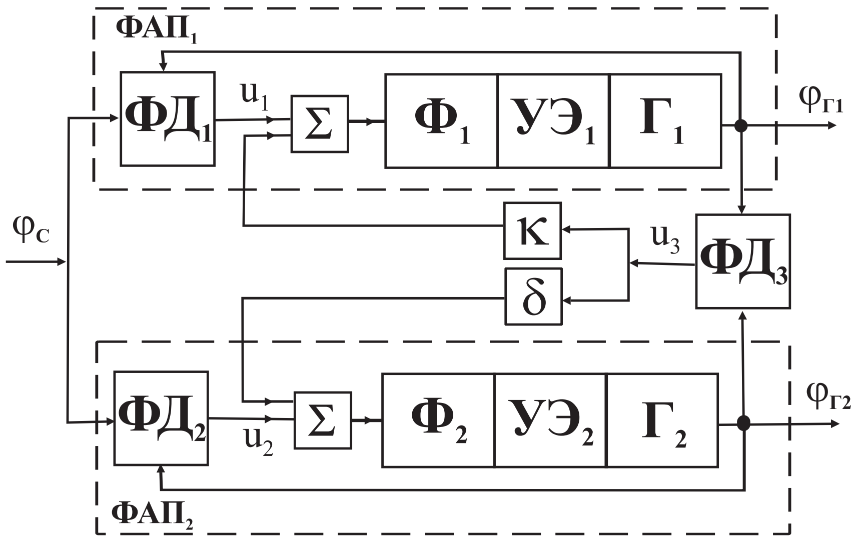


Рис. 3.1: Ансамбль из двух ФАП, связанных через дополнительный дискриминатор

сигналом для обоих управляемых генераторов ансамбля является сигнал φ_c. Объединение ФАП осуществляется следующим образом: выходные сигналы $\varphi_{г1}$ и $\varphi_{г2}$ с управляемых генераторов $Г_1$ и $Г_2$ сравниваются на отдельном фазовом дискриминаторе ФД$_3$, затем полученный сигнал фазового рассогласования u_3, проходя через преобразующие устройства κ и δ, суммируется с выходными сигналами u_1 и u_2 фазовых дискриминаторов ФД$_1$ и ФД$_2$ соответственно. Далее суммарные сигналы $\bar{u}_1{=}u_1+\kappa u_3$ и $\bar{u}_2{=}u_2-\delta u_3$ используются для управления генераторами Γ_1 и Γ_2. Операторные уравнения, описывающие динамику такой системы, имеют вид [3]

$$\begin{aligned}\frac{p\varphi_1}{\Omega_1} &= \frac{\Omega_1^0}{\Omega_1} - K_1(p)[F(\varphi_1) + \kappa F(\varphi_2-\varphi_1)], \\ \frac{p\varphi_2}{\Omega_2} &= \frac{\Omega_2^0}{\Omega_2} - K_2(p)[F(\varphi_2) - \delta F(\varphi_2-\varphi_1)],\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $p\equiv d/dt$, φ_i – текущее фазовое рассогласование, а Ω_i^0 – начальная частотная расстройка i-го управляемого генератора относительно опорного сигнала, Ω_i характеризует полосу удержания i-го генератора, $K_i(p)$ – коэффициент передачи фильтра низких частот Φ_i, $F(\varphi_i)$ – нормированная характеристика фазового дискриминатора $(i=1,2)$.

Если принять, что системы ФАП имеют одинаковые полосы удержания $\Omega_1{=}\Omega_2{=}\Omega$, фазовые дискриминаторы с синусоидальными характеристиками и цепи управления с интегрирующими фильтрами ($K_1(p){=}(1{+}T_1p)^{-1}$, $K_2(p){=}(1{+}T_2p)^{-1}$), то из уравнений (3.1) получатся следующая динамическая система

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, \quad \varepsilon_1\frac{dy_1}{d\tau} = \gamma_1 - \sin\varphi_1 - y_1 - \kappa\sin(\varphi_2-\varphi_1) \equiv P(\varphi_1,y_1,\varphi_2,y_2), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, \quad \varepsilon_2\frac{dy_2}{d\tau} = \gamma_2 - \sin\varphi_2 - y_2 + \delta\sin(\varphi_2-\varphi_1) \equiv Q(\varphi_1,y_1,\varphi_2,y_2),\end{aligned} \tag{3.2}$$

определенная в цилиндрическом фазовом пространстве $U{=}\{\varphi_1(\mathrm{mod}2\pi), y_1, \varphi_2(\mathrm{mod}2\pi), y_2\}$, где $\tau{=}t/\Omega$, $\gamma_i{=}\Omega_i^0/\Omega$, $\varepsilon_i{=}\Omega T_i$, $\kappa{=}\kappa/\Omega$, $\delta=\delta/\Omega$. Системам (3.2) является математической моделью рассматриваемого ансамбля ФАП с фильтрами первого порядка в цепях управления.

При $\varepsilon_1\ll 1$, $\varepsilon_2\ll 1$ система (3.2) является системой с малыми параметрами при производных dy_1/dt и dy_2/dt. Полное движение в фазовом пространстве U разбивается [18] на “быстрые” и “медленные” движения. В силу того, что

$$\frac{\partial P}{\partial y_1}+\frac{\partial Q}{\partial y_2}{=}-2<0, \quad \frac{\partial P}{\partial y_1}\frac{\partial Q}{\partial y_2}-\frac{\partial P}{\partial y_2}\frac{\partial Q}{\partial y_1}{=}1>0,$$

поверхность Z “медленных движений”, определяемая уравнениями $P(\varphi_1,y_1,\varphi_2,y_2)=0$, $Q(\varphi_1,y_1,\varphi_2,y_2)=0$, является устойчивой по отношению к быстрым движениям. Уравнения медленных движений на поверхности Z имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin\varphi_1 - \kappa\sin(\varphi_2-\varphi_1), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \gamma_2 - \sin\varphi_2 + \delta\sin(\varphi_2-\varphi_1).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Система (3.3) в силу периодичности ее правых частей по переменным φ_1 и φ_2 с периодом 2π является нелинейной динамической системой на тороидальной фазовой поверхности $U_0 = \{\varphi_1(\text{mod}2\pi),\ \varphi_2(\text{mod}2\pi)\}$. Система (3.3) инвариантна относительно замен $Z_1 : (\gamma_1, \gamma_2, \varphi_1, \varphi_2) \to (-\gamma_1, -\gamma_2, -\varphi_1, -\varphi_2)$, $Z_2 : (\kappa, \delta, \varphi_1, \varphi_2, \tau) \to (-\kappa, -\delta, \pi-\varphi_1, \pi-\varphi_2, -\tau)$ и $Z_3 : (\varphi_1, \varphi_2, \kappa, \delta, \gamma_1, \gamma_2) \to (\varphi_2, \varphi_1, \delta, \kappa, \gamma_2, \gamma_1)$. В силу замен Z_1 и Z_2 анализ движений системы (3.3) достаточно провести, например, в области $\Lambda_0 : \{\gamma_2{\geq}0, \delta{\geq}0, \gamma_1, \kappa\}$.

Уравнения (3.3) описывают динамику ансамбля, состоящего из двух систем с относительно простой индивидуальной динамикой. Поведение парциальных систем описывается уравнениями (3.3) при $\kappa = 0$ и $\delta = 0$. Для парциальных систем характерны два вида движений: при $|\gamma_1| \leq 1$ ($|\gamma_2| \leq 1$) – состояние покоя с координатой $\varphi_1^* = \arcsin \gamma_1$ ($\varphi_2^* = \arcsin \gamma_2$), при $|\gamma_1| > 1$ ($|\gamma_2| > 1$) – неравномерное движение по окружности $S_1 = \{\varphi_1,\ \varphi_1{\in}[0, 2\pi)\}$ ($S_2 = \{\varphi_2,\ \varphi_2{\in}[0, 2\pi)\}$). Для систем ФАП состояние покоя соответствует *режиму синхронизации* управляемого генератора опорным сигналом, при котором частоты управляемого генератора и опорного сигнала равны, а разность фаз принимает некоторое постоянное значение. Движение по окружности соответствует *режиму биений,* при котором разность фаз подстраиваемого и опорного сигналов неограниченно нарастает.

В случае однонаправленной связи ($\kappa{=}0$ или $\delta{=}0$) один из генераторов ансамбля работает автономно. Например, при $\kappa{=}0$ поведение первого генератора не зависит от состояния второго генератора. Первый генератор находится в режиме синхронизации при $|\gamma_1| \leq 1$ и в режиме биений если $|\gamma_1| > 1$. Состояние второго генератора описывается уравнением

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau}{=}\gamma_2{-}\sqrt{1 + \delta^2 - 2\delta\cos\varphi_1}\,\sin\left(\varphi_2 + \arctan\frac{\delta\sin\varphi_1}{1 - \delta\cos\varphi_1}\right), \tag{3.4}$$

которое становится автономным при $|\gamma_1| \leq 1$ ($\varphi_1{=}\arcsin\gamma_1$) и является неавтономным в противном случае ($\varphi_1{=}2\arctan\left[\sqrt{(\gamma_1^2 - 1)/\gamma_1^2}\tan\left(0.5\tau\sqrt{\gamma_1^2 - 1}\right) - 1\right]$).

3.2 Синхронные режимы

В ансамбле генераторов синхронный режим может реализовываться как у всех генераторов одновременно, так и в отдельных генераторах. Режим, при котором все генераторы ансамбля функционируют в синхронном режиме, определим, как глобальный синхронный режим. Этому режиму в фазовом пространстве отвечают устойчивые состояния равновесия. Режимы работы ансамбля, когда отдельные генераторы функционируют в синхронном режиме, назовем режимами частичной синхронизации ансамбля. Таким режимам в фазовом пространстве отвечают устойчивые многообразия, у которых одна из фазовых координат φ_1 или φ_2 является константой. Режим частичной синхронизации в рассматриваемом ансамбле реализуется только, в случае однонаправленной связи. При $\varkappa$=0, $\delta \neq 0$ второй генератор может находиться в синхронном режиме, только если первый генератор находится в синхронном режиме. Если же первый генератор функционирует в режиме биений, то второй генератор всегда находиться в асинхронном режиме: в квазисинхронном [1], если решение уравнения (3.4) ограничено, и в режиме биений, если решение не ограничено.

Синхронные режимы в случае однонаправленной связи

Положив в системе (3.3) $d\varphi_1/d\tau = d\varphi_2/d\tau = 0$ и $\varkappa$=0, получаем уравнения для определения координат состояний равновесия:

$$\gamma_1 = \sin\varphi_1, \quad \gamma_2 = \sin\varphi_2 - \delta\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{3.5}$$

Решая систему (4.6), устанавливаем, что область существования состояний равновесия $C_0 = C_{02}^- \cup C_{04} \cup C_{02}^+$ определяется следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} C_{04} &= \left\{-\gamma_2^- < \gamma_2 < \gamma_2^-, \ |\gamma_1| < 1\right\}, \\ C_{02}^+ &= \left\{\gamma_2^- < \gamma_2 < \gamma_2^+, \ |\gamma_1| < 1\right\}, \\ C_{02}^- &= \left\{-\gamma_2^+ < \gamma_2 < -\gamma_2^-, \ |\gamma_1| < 1\right\}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\gamma_2^-(\delta,\gamma_1) = \sqrt{1 - 2\delta\sqrt{1-\gamma_1^2} + \delta^2}$, $\gamma_2^+(\delta,\gamma_1) = \sqrt{1 + 2\delta\sqrt{1-\gamma_1^2} + \delta^2}$.

При значениях параметров $(\gamma_1, \gamma_2, \delta) \in C_{04}$ система (3.3) имеет на поверхности тора U_0 четыре состояния равновесия (рис.3.2а):

$$O_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*), \quad O_2(\varphi_1^*, \pi - \varphi_2^*), \quad O_3(\pi - \varphi_1^*, \pi - \varphi_2^*), \quad O_4(\pi - \varphi_1^*, \varphi_2^*),$$

где значения φ_1^* и φ_2^* определяются равенствами

$$\varphi_1^* = \arcsin\gamma_1, \quad \varphi_2^* = \arcsin\frac{\gamma_1}{\sqrt{1 - \delta\sqrt{1-\gamma_1^2} + \delta^2\gamma_1^2}} - \arctan\frac{1 - \delta\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\delta^2\gamma_1^2},$$

Исследуя характер состояний равновесия по корням соответствующих характеристических уравнений, устанавливаем, что устойчивым является состоянием равновесия O_1, состояния равновесия O_2 и O_4 - седла, а O_3 - неустойчивый узел или фокус. Устойчивое состояние равновесия O_1 соответствует глобальному синхронному режиму ансамбля I_1 с остаточными ошибками слежения φ_1^* и φ_2^* в первом и во втором генераторе соответственно.

[1] *Квазисинхронный режим* – режим, при котором имеется регулярная модуляция частоты управляемого генератора около стабилизированной по опорному сигналу средней частоты, а разность фаз подстраиваемого и опорного сигналов изменяется около некоторого среднего значения. Этот режим не характерен для рассматриваемых парциальных систем (систем ФАП с фильтрами первого порядка в цепях управления) и является следствием объединения генераторов в ансамбль.

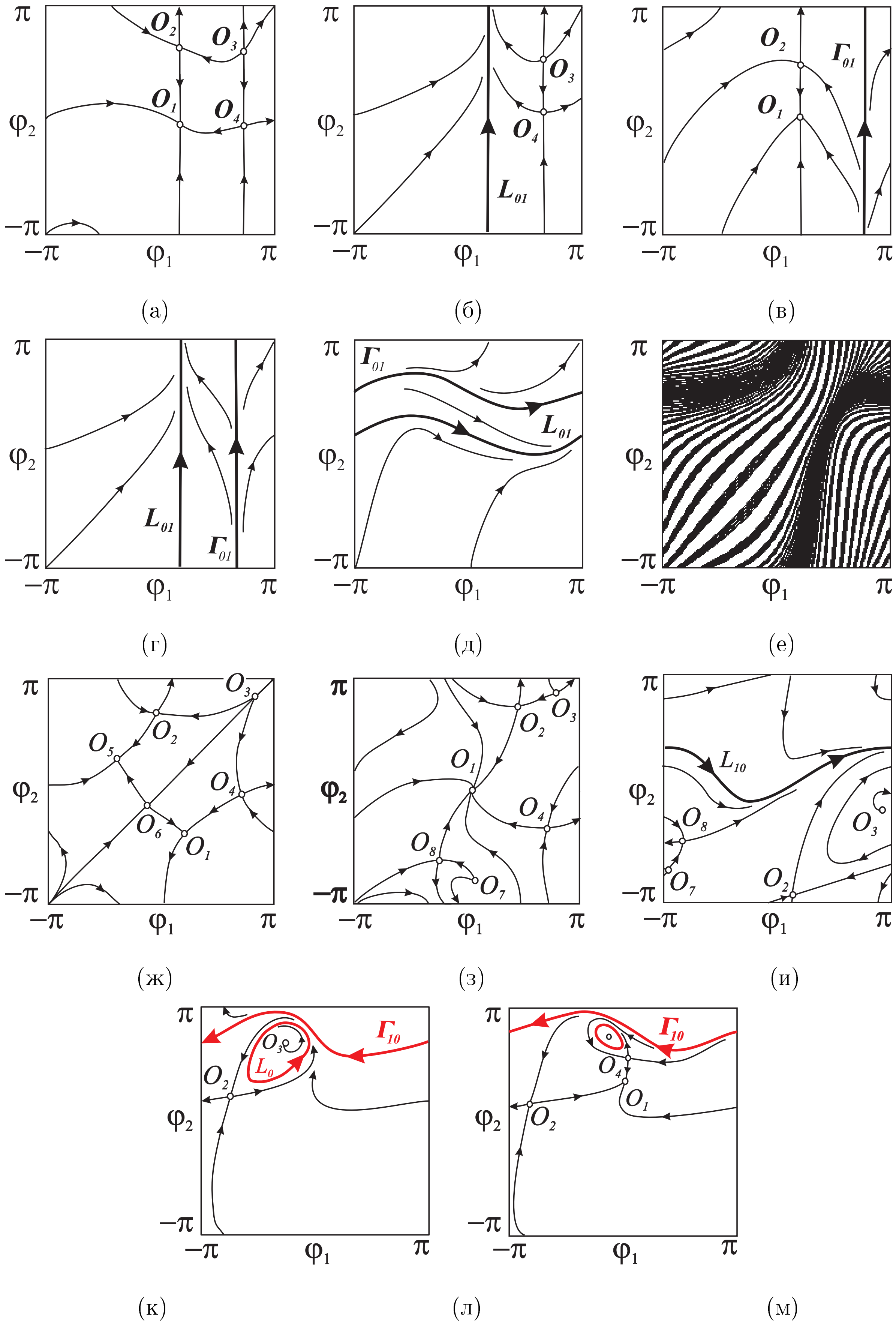


Рис. 3.2: Фазовые портреты системы (3.3)

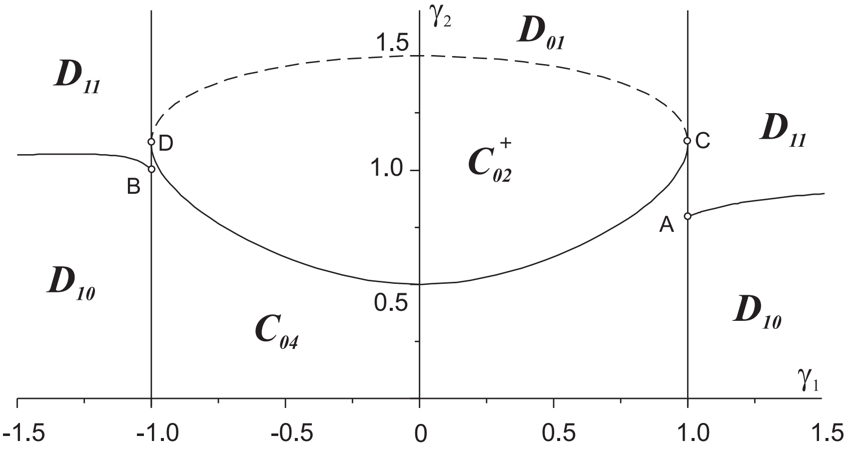


Рис. 3.3: Параметрический портрет системы (3.3) при κ=0, δ=0.5

При значениях параметров $(\gamma_1, \gamma_2, \delta)$ из областей $C_{02}^{\pm}$ система (3.3) имеет два состояния равновесия, тип которых зависит от знака параметра δ. Если δ>0, то на торе U_0 существуют состояния равновесия O_3 и O_2 (O_4), при δ<0 остаются состояния равновесия O_1 и O_2 (O_4). Таким образом область существования синхронных режимов может быть изменена за счет параметра связи, это наглядно демонстрирует параметрический портрет системы (3.3), представленный на рис.3.3.

В случае положительных значений параметра δ область D_S существования глобального синхронного режима I_1 совпадает с областью C_{04}. Анализ области D_S свидетельствует, что область существования синхронного режима второго генератора тем меньше, чем меньше модуль начальной расстройки первого генератора. При γ_1=0 полоса синхронизации второго генератора достигает минимума и равна γ_2^s=1−δ. При значениях модуля параметра γ_1 близких к единице наблюдается незначительное расширение полосы синхронизации, здесь она может быть больше единице. В случае δ<0, в силу инвариантности модели относительно замены Z_2, область D_S совпадает с областью C_0. Теперь наблюдается существенное расширение полосы синхронизации второго генератора, причем полоса синхронизации тем шире, чем меньше модуль γ_1. При γ_1=0 полоса синхронизации второго генератора достигает максимума и равна γ_2^s=1+δ. Из инвариантности системы (3.3) относительно замены Z_3 следует, что полоса синхронизации первого генератора может быть изменена, за счет введения однонаправленной (при $\delta = 0$) связи κ.

Синхронные режимы при взаимных связях

Ведение взаимных связей отражается на динамике обоих генераторов. Рис.3.4 и рис.3.5 иллюстрирует эволюцию синхронизируюших свойств генераторов ансамбля в случае вариации одной из взаимных связей.

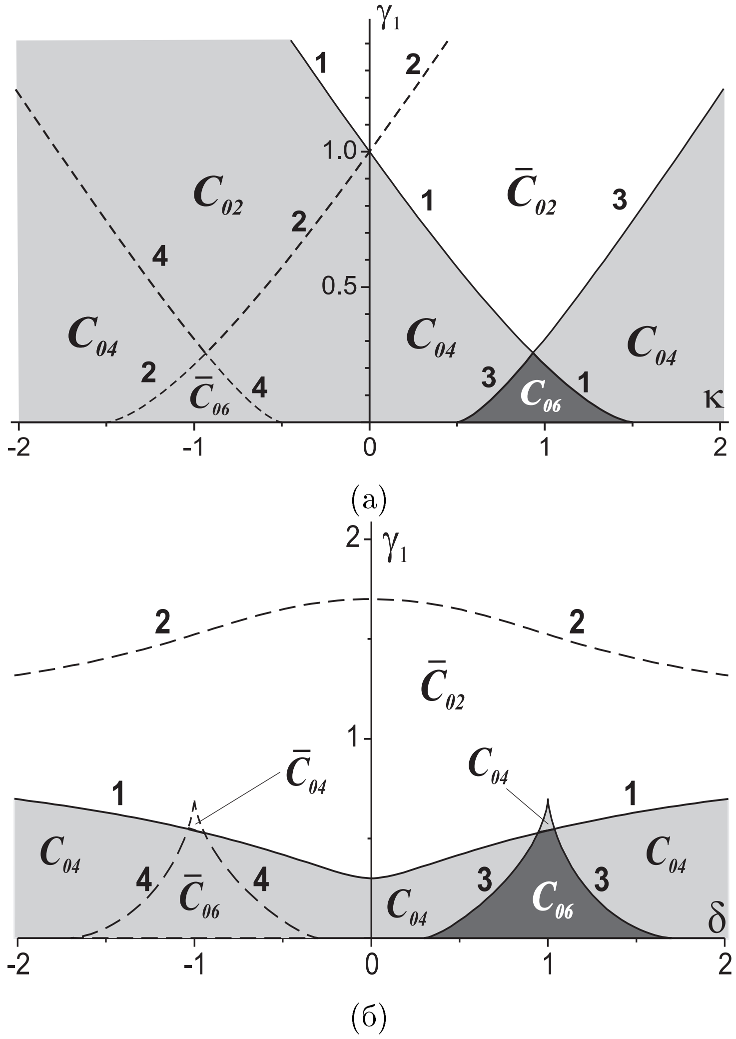


Рис. 3.4: Зависимость полосы синхронизации первого генератора ансамбля от параметров связи κ при γ_2=0, δ=0.5 (а) и δ при γ_2=0, κ=0.7 (б)

На рис.3.4а изображен фрагмент плоскости параметров (κ, γ_1) модели (3.3) при фиксированных δ=0.5, γ_2=0. Этот фрагмент содержит линии, которые соответствуют бифуркациям состояний равновесия системы (3.3). Здесь сплошными линиями проведены кривые, при пересечении которых на торе U_0 появляется (исчезает) устойчивое состояния равновесия: линия 1 – устойчивое состояний равновесия O_1 и седловое O_4 (рис.3.2), линия 3 устойчивое состояния равновесия O_5 и седловое O_6 (рис.3.2е), а пунктирные линии соответствуют появлению неустойчивых состояний равновесия: линия 2 – вполне неустойчивого O_3 и седлового O_2; линия 4 – вполне неустойчивого состояния равновесия O_7 и седлового O_8(рис.3.2з).

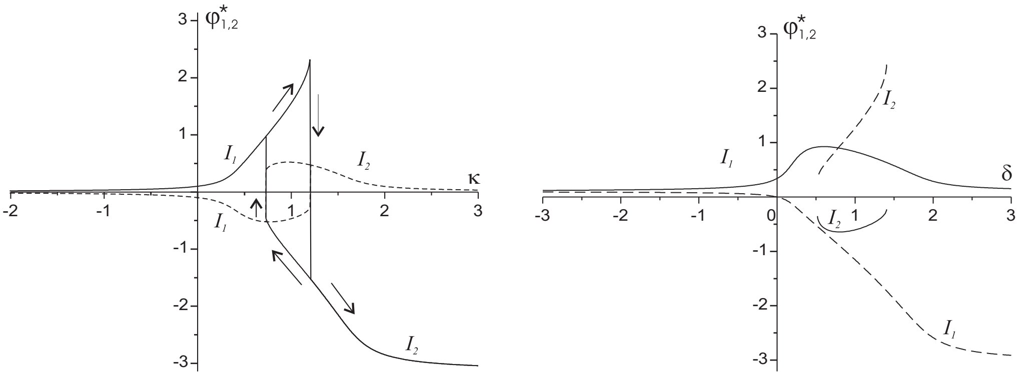
Бифуркационные кривые 1-4 выделяют на плоскости (κ, γ_1) области $\bar{C}_{06}$, C_{04} и C_{02} при значениях параметров из которых в фазовом пространстве системы (3.3) существуют шесть (рис.3.2з), четыре (рис.3.2а) и два (рис.3.2в) состояний равновесия, одно из которых устойчивое; область C_{06} с шестью состояниями равновесия, два из которых устойчивые (рис.3.2ж); а так же область $\bar{C}_{02}$ с двумя неустойчивыми состояниями равновесия (рис.3.2б). Область параметров $D_S = C_{02} \cup C_{04} \cup C_{06} \cup \bar{C}_{06}$ является областью глобальной синхронизации ансамбля. В области C_{06} связанные генераторы демонстрируют бистабильное поведение. Здесь в зависимости от начальных условий в генераторах устанавливается либо синхронный режим I_1, либо режим I_2, определяемые устойчивыми состояниями равновесия O_1 и O_5 соответственно.

Рис.3.4б представляет изменения полосы удержания синхронного режима[2] первого генератора при варьировании связи δ в случае κ=0.7 и γ_2=0. Здесь сохранены обозначения для линий и областей, принятые на рис.3.4а. В новой области $\bar{C}_{04}$ система (3.3) имеет четыре неустойчивых состояния равновесия (рис.3.2и). Область глобальной синхронизации $D_S = C_{04} \cup C_{06}$ теперь не содержит область с двумя состояниями равновесия. Примечательно, что изменение полосы синхронизации (удержания синхронного режима) первого генератора при варьировании параметра δ, в отличии от случая изменения κ, может носить не монотонный характер. На рис.3.4б видно, что при значениях связи δ близких к значениям δ=1 наблюдается резкое расширение полосы синхронизации.

Используя замену Z_2 из рис.3.4а и рис.3.4б можно получить зависимости полосы синхронизации первого генератора от параметров κ и δ в случае фиксированных отрицательных связях $\kappa = -0.7$ и $\delta = -0.5$ соответственно. В результате замены Z_2 пунктирные линии на рис.3.4 превращаются в сплошные и становятся границами области синхронизации, сплошные линии преобразуются в пунктирные линии, которые не оказывают влияние на синхронизирующие свойства генераторов ансамбля. Таким образом, из рис.3.4а следует, что смена знака у параметра δ не приводит к качественным изменениям синхронизирующих свойств первого генератора: область существования синхронных режимов не увеличивается, изменения полосы синхронизации при варьировании κ сохраняют монотонный характер, область бистабильного синхронного поведения расположена в области наименьших значений полосы синхронизации. Из рис.3.4б следует, что при $\kappa < 0$ область синхронизации расширяется за счет области с двумя состояниями равновесия ($D_S = \bar{C}_{02} \cup C_{04} \cup \bar{C}_{04} \cup \bar{C}_{06}$), при этом область бистабильного синхронного поведения C_{06} трансформируются в область моностабильного режима, а бистабильное поведение система (3.3) демонстрирует при значениях параметров из области $\bar{C}_{04}$. Резкое расширение полосы синхронизации первого генератора наблюдается теперь при δ близких к значениям $\delta = -1$.

Теперь рассмотрим влияния параметров связей на точность синхронизации генераторов, которая определяется значениями координат устойчивых состояний равновесия модели (3.3). Рис.3.5 иллюстрирует это влияние. На рис.3.5а представлены

[2]Полоса удержания синхронного режима – интервал начальной частотной расстройки при значениях параметров из которого существует режим синхронизации.



(а) (б)

Рис. 3.5: Эволюция ошибок синхронизации генераторов ансамбля при изменении параметров связи κ в случае γ_1=0.1, γ_2=0, $\delta = 0.5$ (а) и δ при γ_1=0.1, γ_2=0, κ=0.7 (б)

линии, характеризующие ошибки синхронизации φ_1^* (сплошная линия) и φ_2^* (пунктирная линия) первого и второго генераторов при изменении параметра κ от -2 до 3 и в обратном направлении от 3 до -2. Из анализа представленных кривых следует, что введение отрицательной связи κ при $\delta > 0$ позволяет уменьшить ошибки синхронизации обоих генераторов ансамбля. Введение положительной связи κ при $\delta > 0$ ведет к снижению качества синхроннизации. При увеличении κ наблюдается достаточно быстрое снижение точности синхронизации обоих генераторов, при этом ошибка синхронизации первого генератора растет монотонно, а ошибка синхронизации второго генератора имеет экстремум при $\kappa = 0.77$ ($\varphi_2^* = -0.52358$). При $\kappa = 1.20132$ происходит срыв генераторов на противофазный синхронный режим I_2. Теперь, при дальнейшем увеличении κ, ошибка синхронизации второго генератора φ_2^* стремиться к нулю, а ошибка синхронизации первого генератора φ_1^* стремиться к $-\pi$.

При обратном движении по параметру κ от значений $\kappa = 3$ до $\kappa = -2$, вначале происходит монотонное уменьшение ошибки синхронизации первого генератора, а а ошибка синхронизации второго генератора растет и имеет экстремум при $\kappa = 0.97$ ($\varphi_2^* = 0,52358$), далее при $\kappa = 0.72$ происходит срыв генераторов на синфазный синхронный режим I_1. При дальнейшем уменьшении κ ошибки φ_1^* и φ_2^* стремятся к нулю. Примечательно, что в рассмотренном случае при вариации κ переключение с режима I_1 на I_2 и обратно с I_2 на I_1 происходит при различных значениях κ, т.е. в системе (3.3) наблюдается гистерезисное явление, связанное с синхронными режимами и вариациями параметров связей.

Теперь рассмотрим, как изменяются ошибки синхронизации генераторов ансамбля при варьировании значений параметра δ (рис.3.5б). Из рис.3.5б видно, что введение отрицательной связи δ при $\kappa > 0$ позволяет уменьшить ошибки синхронизации обоих генераторов ансамбля. Введение положительной связи δ при $\kappa = 0.7$ ведет монотонному росту ошибки синхронизации второго генератора φ_2^*, которая стремиться к -3.034. Ошибка синхронизации первого генератора при увеличении δ достигает максимума при $\delta = 0.6$ ($\varphi_1^* = 0.9273$), далее φ_1^* уменьшается и стремиться к 1.033. Таким образом при изменении δ переключение на режим I_2 не происходит, хотя потенциально эта возможность существует

3.3 Динамика ансамбля в случае однонаправленной связи

Пусть $\kappa = 0$, $\delta = 0.5$. Проанализируем влияние параметров начальной частотной расстройки γ_1 и γ_2 на динамические режимы ансамбля (рис.3.3). При значениях параметров из области D_S в ансамбле всегда устанавливается глобальный синхронный режим. При выходе из области устойчивости D_S в область D_{10} на участках границы γ_1=1, расположенной ниже точки A, и границы $\gamma_1 = -1$ ниже точки B, происходит слияние и исчезновение состояний равновесия O_1, O_4 и O_2, O_3. В результате этой бифуркации возникают устойчивый L_{10} и неустойчивый Γ_{10} предельные циклы, охватывающие фазовый тор U_0 в только направлении φ_1 (рис.3.2д). Устойчивый предельный цикл L_{10} определяет режим биений первого генератора и квазисинхронный режим работы второго генератора. Участок границы γ_1=1, заключенный между точками A и C, а также часть границы γ_1=-1 между точками B и D соответствуют переходу ансамбля от глобального синхронного режима к глобальному режиму биений - режиму при котором оба генератора функционируют в режиме биений. Глобальному режиму биений в фазовом пространстве модели (3.3) отвечают аттракторы вращательного типа, охватывающие тор U_0 как в направлении φ_1, так и в направлении φ_2. Такие движения характеризуются числом вращения μ [56] ($\mu \neq 0$, $\mu \neq \infty$), которое может принимать как рациональные так и иррациональные значения.

Выход из области D_{10} с ростом (убыванием) параметра γ_2 сопровождается бифуркацией двойного предельного цикла, в результате которой исчезают предельные циклы L_{10} и Γ_{10}, а система (3.3) переходит на вращательные движения, соответствующие глобальному режиму биений.

При выходе из области D_S с изменением параметра γ_2 в случае $\delta > 0$ сопровождается исчезновением состояний равновесия O_1 и O_2, которое приводит к рождению устойчивого предельного цикла L_{01}, охватывающего тор U_0 только в направлении φ_2 (рис.3.2б). Характерной особенность этого предельного цикла является то, что координата φ_1 изображающей точки на этом цикле не меняется с течением времени. Поэтому цикл L_{01} при κ=0 отвечает режиму частичной синхронизации ансамбля, когда первый генератор ансамбля функционирует в режиме синхронизации, а второй в режиме биений. Дальнейшее увеличение значений параметра γ_2 приводит к исчезновению состояний равновесия O_3, O_4 и рождению неустойчивого предельного предельного цикла Γ_{01} (рис.3.2г). Эта бифуркация не приводит к качественным изменениям коллективной динамики ансамбля. Выход из области D_{01} существования предельного цикла L_{01} с изменением параметра γ_1 связан с касательной бифуркацией, в результате которой циклы L_{01} и Γ_{01} исчезают и система (3.3) переходит на режим биений.

Эволюцию динамических режимов ансамбля в случае δ<0 легко получить из сценариев рассмотренных выше, используя замену Z_2. Здесь, при выходе из области D_S с изменением параметра γ_2 сначала происходит бифуркация исчезновения состояний равновесия O_3, O_4, которая приводит к рождению неустойчивого предельного предельного цикла Γ_{01} (рис.3.2б). Эта бифуркация не выводит ансамбль из области D_S: оба генератора продолжают работать в синхронном режиме. Далее следует бифуркация исчезновение состояний равновесия O_1, O_2 и рождение устойчивого предельного цикла L_{01}. Теперь динамика ансамбля определяется фазовым портретом, представленным на рис.3.2г, при котором, первый генератор находится в синхронном режиме, а второй генератор работает в режиме биений.

3.4 Качественные структуры и бифуркации модели ансамбля с взаимными связями

В силу существенной нелинейности исследование движений модели (3.3) при $\kappa \neq 0$ и $\delta \neq 0$ приводилось численно [13], путем продолжения по параметру κ установленных ранее для случая κ=0 структур. При этом отдельно были рассмотрены случаи положительных ($\delta > 0, \kappa > 0$) и отрицательных ($\delta < 0, \kappa < 0$) связей, а также случай, когда $\delta \cdot \kappa < 0$.

Случай положительных связей $\kappa > 0, \delta > 0$

Зафиксируем силу связи δ на уровне $\delta = 0.5$ и рассмотрим изменения параметрического портрета (γ_1, γ_2) системы (3.3), обусловленные введением "обратной" связи κ и дальнейшем ее увеличением. Динамику модели (3.3) при слабой положительной связи κ=0.1 характеризует параметрический портрет, представленный на рис.3.6а. Линии, приведенные на рис.3.6а ограничивают области параметров с различным динамическим поведением и соответствуют следующим бифуркациям модели (3.3):

линия 1 – кривая исчезновения (рождения) состояний равновесия O_1 и O_2 (рис.3.2а);

линия 2 – кривая исчезновения (рождения) состояний равновесия O_1 и O_4;

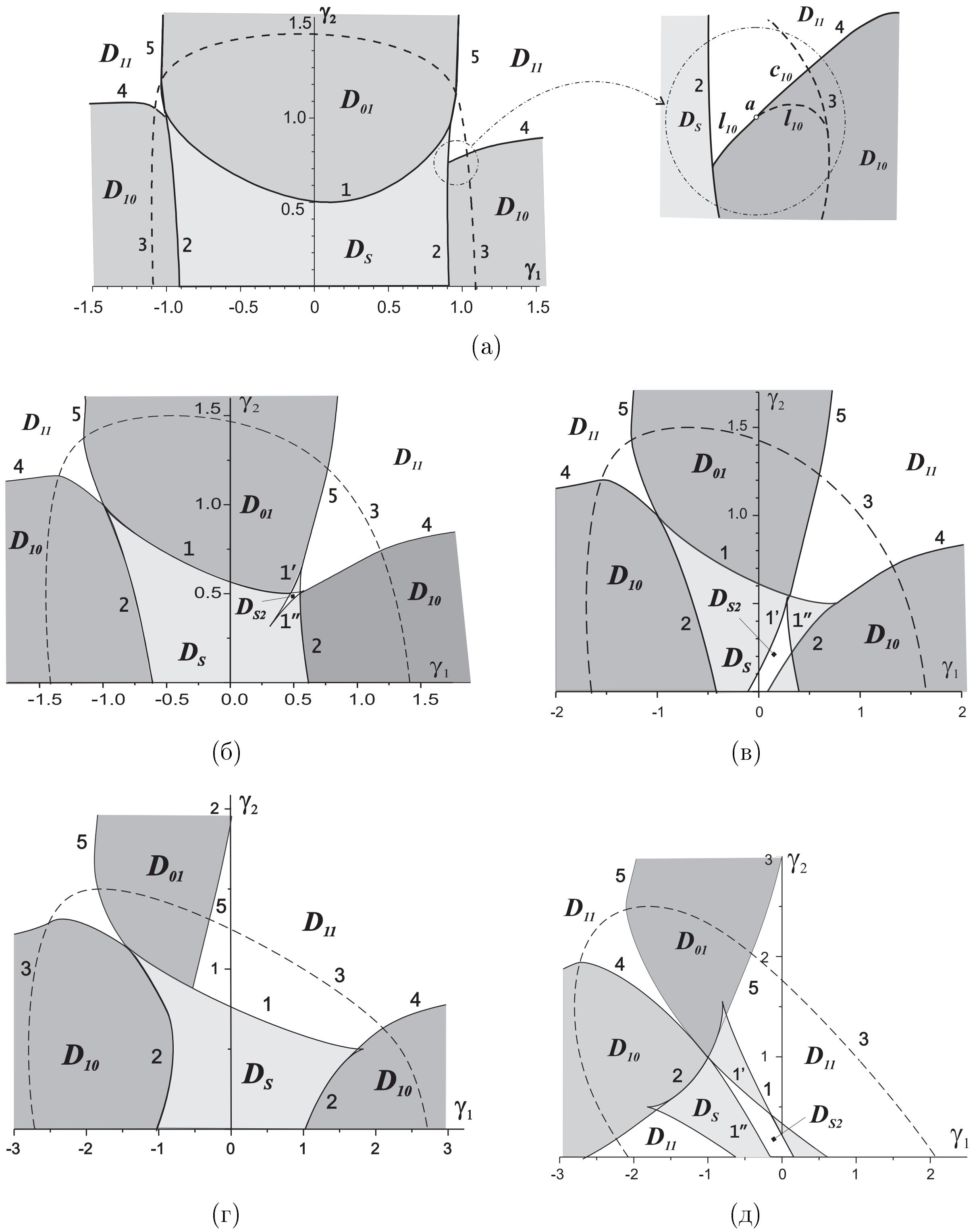


Рис. 3.6: Бифуркационные диаграммы динамических режимов модели (3.3) при δ=0.5, κ=0.1 (а), 0.45 (б), 0.7 (в), 1.8 (г), δ=1.5, κ=1.8 (д)

линия 3 – кривая исчезновения (рождения) состояний равновесия O_3 и $O_2(O_4)$;

линия 4 – линия, составлена из бифуркационной кривой l_{10} петли сепаратрис седла O_2, охватывающей фазовый тор U_0 в направлении φ_1, и бифуркационной кривой c_{10}, отвечающей образованию двойного предельного цикла при слиянии предельных циклов L_{10} и Γ_{10} (рис.3.2д). Кривые l_{10} и c_{10} смыкаются в точке a, которая соответствует обращению в ноль седловой величины σ_2. Слева от точки a седловая величина $\sigma_2 < 0$, здесь при пересечении на кривой l_{10} сверху вниз в фазовом пространстве U_0 рождается устойчивый предельный цикл L_{10}. Справа от точки a седловая величина $\sigma_2 > 0$, поэтому при пересечении этого участка кривой l_{10} снизу вверх в фазовом пространстве рождается неустойчивый предельный цикл Γ_{10} (участок кривой l_{10}, где $\sigma_2 > 0$, проведен пунктирной линией);

структура линии 5, аналогична структуре линии 4. Линия 5 состоит из части бифуркационной кривой l_{01} петли сепаратрис седла O_4, охватывающей тор U_0 в направлении φ_2 (части кривой l_{01}, где $\sigma_4 < 0$), и кривой c_{01} двойного предельного цикла, образованного из циклов L_{01} и Γ_{01}(рис.3.2д).

Кривые 1–5 разбивают плоскость (γ_1, γ_2) на области с различным динамическим поведением. Область D_S, ограниченная линиями 1 и 2, является областью захвата в синхронный режим. Здесь система (3.3) имеет фазовый портрет, представленный на рис.3.2а, на котором единственным аттрактором является состояние равновесия O_1. При значениях параметров из области D_{10} единственным притягивающим элементом на торе U_0 является предельный цикл L_{10}. Он определяет режим биений первого генератора и квазисинхронный режим второго генератора. В области D_{01} единственным аттрактором системы (3.3) является предельный цикл L_{01}. Теперь, в отличии от случая κ=0, предельный цикл L_{01} имеет отклонения по координате φ_1, что соответствует установлению квазисинхронных колебаний на выходе первого генератора.

Дальнейшее увеличение параметра κ приводит к качественным изменениям коллективной динамики ансамбля. Связаны они с суперкритической бифуркацией состояния равновесия O_1, при которой состояние равновесия O_1 становится седловым, а в его окрестности появляются два устойчивых состояния равновесия O_4 и O_5 (рис.3.2ж). Таким образом увеличение силы связи κ приводит к тому, что синхронный режим I_1 разваливается на два I_{11} и I_{12}, определяемые устойчивыми состояниями равновесия O_4 и O_5 соответственно. На плоскости параметров (γ_1, γ_2) суперкритическая бифуркация приводит к тому, что на кривой 1 появляется точка, в которой она перекручивается. В результате образуется область D_{S2} треугольной формы (рис.3.6б), при значениях параметров из которой модель (3.3) имеет два устойчивых состояния равновесия (рис.3.2ж). Область D_{S2} ограничена линиями 1, $1'$ и $1''$. Здесь кривая $1'$ соответствует слиянию состояний равновесия O_1 и O_6, кривая $1''$ слиянию состояний равновесия O_1 и O_5, а участок кривой 1, ограничивающий D_{S2}, теперь отвечает слиянию состояний равновесия O_5 и O_2.

Последующее увеличение параметра κ приводит к расширению области D_{S2}, причем это расширение распространяется преимущественно в сторону нулевых начальных расстроек и захватывает области отрицательных γ_1 и γ_2. Это приводит к тому, что, во-первых, в качестве границы области D_{S2}, может выступать кривая 2, а во-вторых, если в момент зарождения $D_{S2} = D_{S2}^{-} \cup D_{S2}^{+}$ состояла из двух подобластей (одна подобласть D_{S2}^{+} появляется при $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$, другая D_{S2}^{-}– при $\gamma_1 < 0, \gamma_2 < 0$), то при увеличение κ подобласти $D_{S2}-$ и D_{S2}^{+} объединяются в одну (рис.3.6в). Теперь участок кривой 2, ограничивающий область D_{S2}, отвечает слиянию состояний равновесия O_5 и O_4. Если продолжать увеличивать силу связи κ то область D_{S2} исчезает (рис.3.6г) и структура параметрического портрета становится эквивалентна структуре параметрического портрета при слабых связях. Из представленных результатов следует, что существуют такие значения $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2)$, где динамика ансамбля качественно изменяется - она демонстрирует бистабильное синхронное поведение. На рис.3.6д представлен параметрический портрет системы в случае сильных ($\kappa > 1, \delta > 1$) положительных взаимных связей. На этом портрете, также присутствует область бистабильного синхронного режима D_{S2}. Это свидетельствует о том, что наличие области D_{S2}, зависит от соотношения взаимных связей κ и δ.

Таким образом, введение связи κ>0, приводит, во-первых, к появлению новых динамических режимов управляемых генераторов: бистабильного синхронного режима, квазисинхронного режима у первого генератора. Причем, квазисинхронные колебания на выходе первого генератора, появляются мягко и не сопровождаются бифуркациями особых траекторий в фазовом пространстве. Во-вторых, введение положительных κ приводит к уменьшению области глобальной синхронизации D_S, за счет сужения полосы синхронизации первого генератора.

Случай отрицательных связей $\kappa < 0, \delta < 0$

Структуру фазового пространства и разбиение плоскости параметров (γ_1, γ_2) системы (3.3) в случае $\delta < 0, \kappa < 0$ нетрудно получить из структур установленных выше, используя замену Z_2. Замена Z_2 делает устойчивые состояния равновесия O_1, O_5 и предельные циклы L_{01}, L_{10} неустойчивыми, а неустойчивые состояние равновесия O_3 и предельные циклы Γ_{01}, Γ_{10} устойчивыми. Эта замена приводит также к смене знака седловой величины на бифуркационных кривых, отвечающих образованию гомоклинических траекторий, что отражается на границах областей существования квазисинхронных режимов D_{01} и D_{10}. Теперь области существования квазисинхронных движений узкими клювами проникают в область D_S, порождая явление бистабильности. В области параметров $D_S \cap D_{10}$ или $D_S \cap D_{01}$ в ансамбле в зависимости

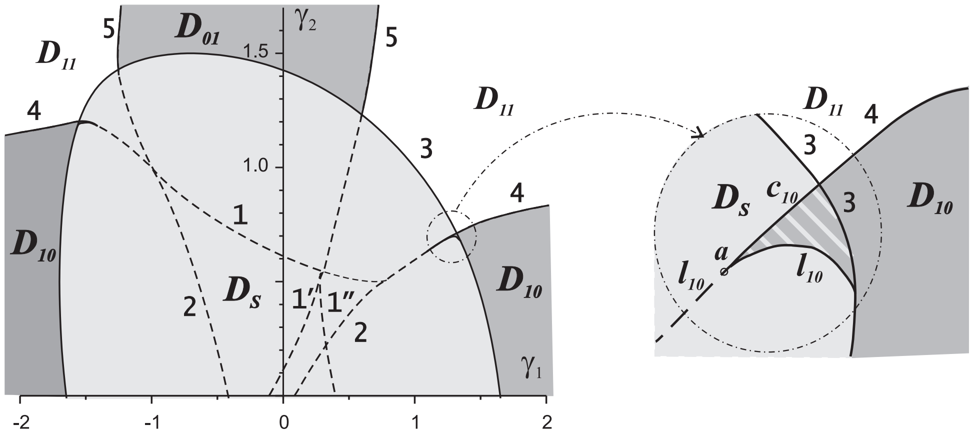


Рис. 3.7: Бифуркационные диаграммы динамических режимов модели (3.3) при $\delta=$ $=-0.5$, $\kappa=-0.7$

от начальных условий реализуется либо глобальный режим синхронизации, либо режим частичной квазисинхронизации, при котором один из генераторов ансамбля функционирует в квазисинхронном режиме, а другой – в режиме биений.

Результат введения отрицательных связей демонстрирует бифуркационная диаграмма динамических режимов модели (3.3), представленная на рис.3.7. Здесь область существования синхронного режима D_S ограничена кривой 3, область бистабильного синхронного режима D_{S2} отсутствует. Области квазисинхронных режимов D_{01} и D_{10}, как и ранее (в случае $\delta > 0, \kappa > 0$) ограничены кривыми c_{01} и c_{10}, отвечающими касательной бифуркации - эти участки границы остается неизменными, и кривыми l_{01} и l_{10}, соответствующими образованию гомоклинических траекторий седлового (седло-узлового) состояний равновесия O_3. Так как области бистабильного поведения очень узкие, то они качественно изображены на увеличенном фрагменте в виде областей со штриховкой. Пунктирные линии, проходящие внутри области D_S, теперь отвечают за рождение неустойчивых состояний равновесия и предельных циклов, которые не оказывают влияние на стационарные режимы ансамбля.

Динамика ансамбля в случае $\kappa \cdot \delta < 0$

Рассмотрим, как изменится динамика ансамбля с однонаправленной положительной связью, например δ>0, при введении слабой отрицательной обратной связи κ<0. Этот случай иллюстрирует бифуркационная диаграмма динамических режимов на рис.3.8, построенная для значений $\kappa=-0.1$, δ=0.5.

При введении слабой отрицательной связи первый генератор ансамбля приобретает свойства генератора, находящегося под действием отрицательной связи, второй же генератор сохраняет свойства генератора, находящегося под действием однона-

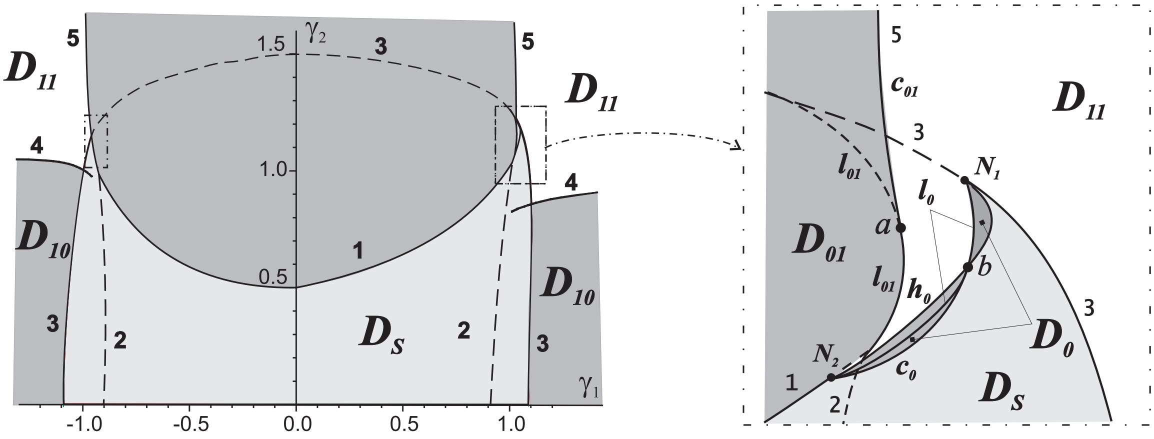


Рис. 3.8: Параметрический портрет системы (3.3) при $\kappa = -0.1, \delta = 0.5$

правленной положительной связи. Разбиения плоскости параметров (γ_1, γ_2) в интервале малых γ_1 наследует структуру разбиения в случае положительных связей ("положительная"структура), а в интервале малых γ_2 – структуру разбиения в случае отрицательных связей ("отрицательная"структура). Новые явления в модели (3.3) возникают на границе положительной и отрицательной структур. На рис.3.8 области параметров, где происходят изменения выделены штрих пунктирной линией, а структура одной из выделенных областей качественно представлена на фрагменте. Здесь появились новые бифуркационные кривые, для которых введены следующие обозначения: h_0 - бифуркационная кривая смены устойчивости состояния равновесия O_1, через бифуркацию Андронова-Хопфа; l_0 - бифуркационная кривая, соответствующая образованию петли сепаратрис 1-го рода седла O_4 (петли не охватывающей тор U_0 ни по одной из фазовых координат); c_0 - бифуркационная кривая двойного предельного цикла 1-го рода, а также точки N_1, N_2, где состояние равновесия O_1 имеет нулевые характеристические корни, и точка $b \in h_0$, соответствующая обращению в ноль первой ляпуновской величины L_1. Точка N_1 делит линию 3 на два участка: участок расположенный выше точки N_1 (на рис.3.8 этот участок выделен пунктирной линией) соответствует слиянию и исчезновению (рождению) неустойчивых состояний равновесия, а на участке расположенном ниже точки N_1 исчезновение устойчивого состояния равновесия. Точка N_2, лежащая на линии 1, аналогична точке N_1. Здесь участок линии 1, расположенный слева от точки N_2, соответствует рождению устойчивого состояния равновесия, а участок справа – соответствует рождению неустойчивых состояний равновесия. Точки N_1 и N_2 являются концевыми точками бифуркационной кривой h_0.

В случае связей разных знаков нарушение глобальной синхронизации генераторов ансамбля может происходить не только в результате исчезновения устойчивых состояний равновесия, но и за счет потери устойчивости этими состояниями равновесия. Причем смена устойчивости может происходить как мягко, так и жестко.

Справа от точки b смена устойчивости состояния равновесия O_1 происходит мягко, так как здесь $L_1 < 0$, а участок кривой h_0 является безопасной границей. При пересечении h_0 снизу вверх на участке, расположенном левее точки b, смена устойчивости состояния равновесия O_1 сопровождается рождением устойчивого колебательного предельного цикла L_0 малой амплитуды. Для генераторов ансамбля, рождение цикла L_0 соответствую тому, что ансамбль из глобального синхронного режима мягко переходит в глобальный квазисинхронный режим. Далее при изменении параметров и по мере удаления от h_0 амплитуда предельного цикла L_0 растет. При пересечении кривой l_0 цикл L_0 влипает в петлю сепаратрис седла O_4 и исчезает, система (3.3) переходит на вращательные движения, генераторы ансамбля срываются на режим биений.

Слева от точки b кривая h_0 является опасной границей. Здесь смене устойчивости состояния равновесия O_1 предшествует две бифуркации. Сначала при пересечении кривой c_0 в результате касательной бифуркации на фазовом торе U_0 рождаются устойчивый L_0 и неустойчивый Γ_0 колебательные предельные циклы. Далее при пересечении линии l_0 предельный цикл L_0 исчезает, влипая в петлю сепаратрис седла O_4, а неустойчивый Γ_0 стягивается в точку O_1 (на кривой h_0). В результате бифуркации Андронова-Хопфа состояние равновесия O_1 теряет устойчивость, система (3.3) переходит на вращательные движения, генераторы ансамбля срываются на режим биений.

Таким образом, можно констатировать, что введение слабой отрицательной связи в ансамбль с однонаправленной положительной связью привело к появлению нового динамического режима - глобального режима квазисинхронизации. Режим квазисинхронизации имеет место при значениях параметров из области D_0, которая ограничена бифуркационными кривыми Андронова-Хопфа, образования гомоклинической траектории 1-го рода, касательной бифуркации. Примечательно, что эти бифуркации происходят при наличии в фазовом пространстве системы (3.3) вращательных движений, т.е. в области D_0 модель (3.3) обладает свойством мультистабильности. Для случая $\kappa = -0.1, \delta = 0.5$ граница между положительной и отрицательной структурами в области $\gamma_1 < 0$ устроена так же как и при $\gamma_1 > 0$.

Глава 4

Системы ФАП, объединеные в кольцо

4.1 Схема и модели

Кольцевое объединение генераторов в ансамбль аналогично каскадному [?] – в обоих случаях сигнал с выхода одной системы ФАП является входным (опорным) для другой, однако в кольце, в силу того, что сигнал с «последней» системы является опорным для «первой», где понятия «первой» и «последней» весьма условно, то и «опорный сигнал» является также условным, т.е. можно считать, что при кольцевом соединении ФАП опорный сигнал отсутствует. Поэтому, при написании динамических уравнений ансамбля с кольцевым типом объединения, удобно не привязываться к какому либо опорному сигналу, а представлять эти уравнения в переменных разности фаз колебаний соседних элементов.

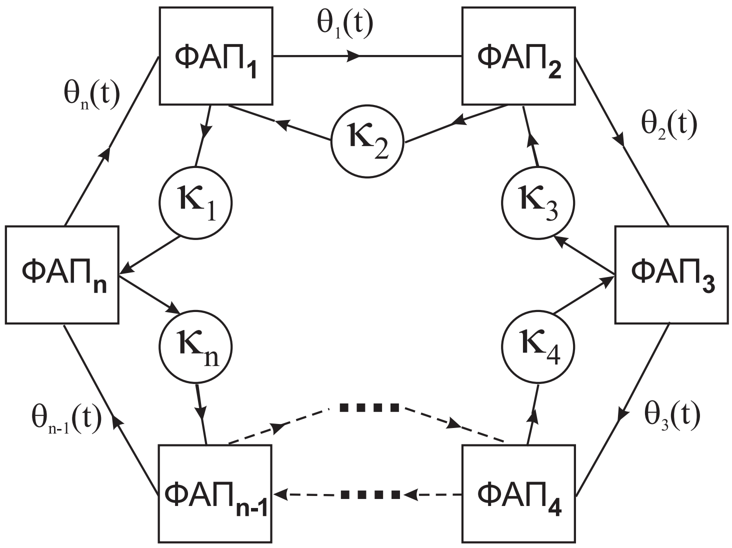


Рис. 4.1: Схема кольцевого соединения фазоуправляемых генераторов.

Наряду с основными связями в ансамбле организованы дополнительные связи в обратном направлении через сигналы фазовых рассогласований – сигнал с выхода фазового дискриминатора ФАП$_i$ с весовым коэффициентом κ_i подается в цепь управления ФАП$_{i-1}$. Уравнения динамики кольца из n систем ФАП с дополнительными локальными связями могут быть представлены следующими символическими уравнениями для фаз колебаний генераторов [**?**, **?**]:

$$p\theta_i = \omega_i - \Omega_i K_i(p)[F(\theta_i - \theta_{i-1}) + \kappa_{i+1}F(\theta_{i+1} - \theta_i)], \tag{4.1}$$

или разности фаз колебаний соседних генераторов:

$$\begin{aligned} \frac{p\varphi_i}{\Omega_1} = \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\Omega_1} \quad &- \quad b_i K_i(p)[F(\varphi_i) + \kappa_{i+1}F(\varphi_{i+1})] \\ &+ \quad b_{i-1}K_{i-1}(p)[F(\varphi_{i-1}) + \kappa_i F(\varphi_i)]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $i = \overline{1,n}$, i=0=n, i=$n+1$=1, p≡d/dt – оператор дифференцирования, θ_i и ω_i– фаза и свободная частота колебаний i-го генератора,$\varphi_i(t) = \theta_i(t) - \theta_{i-1}(t)$, $K_i(p)$ – операторный коэффициент передачи фильтра в цепи управления i-го генератора, Ω_i – максимальная расстройка частот, которую способна скомпенсировать цепь управления ФАП$_i$, $b_i = \Omega_i/\Omega_1$, $F(\varphi_i)$ – нормированная характеристика фазовых дискриминаторов, κ_i – параметры дополнительных связей. В модели (4.2) условия кольца позволяют уменьшить размерность модели на единицу.

Уравнения динамики кольца для разности фаз колебаний относительно «первого» генератора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{p\psi_i}{\Omega_1} = \frac{\omega_i - \omega_1}{\Omega_1} - b_i K_i(p)[F(\psi_i - \psi_{i-1}) + \kappa_{i+1}F(\psi_{i+1} - \psi_i)] \\ + K_1(p)[\kappa_2 F(\psi_{i-1}) - F(\psi_i)]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\psi_i = \theta_i - \theta_1$ – разность фаз между элементом ФАП$_i$ и первым элементом ансамбля.

Конкретная динамическая система получается при определении в уравнениях (4.2) или (4.3) операторов $K_i(p)$ функций $F(\varphi_i)$. Если $K_i(p) = (1 + T_i p)^{-1}$, $F(\varphi_i) = \sin\varphi_i$, то из (4.2) получается следующая динамическая система

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{d\tau} &= y_i, \\ \frac{dy_i}{d\tau} &= z_i \\ \varepsilon_i\varepsilon_{i-1}\frac{dz_i}{d\tau} &= \gamma_i - y_i - (\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1})z_i + b_{i-1}\sin\varphi_{i-1} - (b_i - b_{i-1}\kappa_i)\sin\varphi_i + \\ &\quad + b_i\kappa_{i+1}\sin\varphi_{i+1} \ + \ b_{i-1}\varepsilon_i\cos\varphi_{i-1}y_{i-1} \ + \\ &\quad + (b_i\varepsilon_{i-1} \ + \ b_{i-1}\varepsilon_i\kappa_i)\cos\varphi_i y_i \ + \ b_i\varepsilon_{i-1}\kappa_{i+1}\cos\varphi_{i+1}y_{i+1}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

определенная в $3N$ –мерном цилиндрическом фазовом пространстве $V_c : \{\varphi_i(\text{mod}2\pi)$, $y_i, z_i, \ \ i = \overline{1,N}\}$, содержащим N циклических координат. Наличие в математической модели (4.4) циклических координат φ_i приводит к разнообразию аттракторов в фазовом пространстве [46], что обуславливает широкий набор динамических режимов ансамбля. Причем, большое разнообразие динамических режимов в первую очередь определяется числом N элементов в ансамбле и мало зависит от сложности фильтров в цепях управления парциальных элементов. Далее остановимся на классификации динамических режимов кольцевых соединений, применительно к модели (4.4).

4.2 Классификация динамических режимов

Классификации динамических режимов кольцевых соединений, применительно к модели (4.4), осуществляется по типу аттрактора в соответствующем фазовом пространстве V_c. В принципиальном плане можно выделить пять видов динамических режимов: глобальной или полной синхронизации, глобальной квазисинхронизации, кластерной или частичной синхронизации, кластерной синхронизации, режим биений [**?**, **?**].

- *Режим глобальной синхронизации* генераторов ансамбля, при котором частоты колебаний генераторов равны, а их фазы отличаются на некоторые величины. В фазовом пространстве математической модели (4.4) режиму синхронизации соответствуют *устойчивые состояния равновесия*. Величины рассогласования колебаний по фазе, характеризуют циклические координаты состояний равновесия $\varphi_1^*, \varphi_2^*, ..., \varphi_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i$. Значения φ_i^* определяют фазовые ошибки режима синхронизации.

- *Режим глобальной квазисинхронизации*, при котором частоты колебаний генераторов ансамбля различаются, но равны нулю усредненные разности частот колебаний любых генераторов ($< y_1 >= < y_2 > = ... < y_{n-1} >= 0, < y_n >=< y_1 > + < y_2 > +...+ < y_{n-1} > = 0$). Колебательные аттракторы модели (4.4), являющиеся математическим образом такого режима, могут быть регулярными (предельные циклы), квазирегулярными (инвариантные торы) и хаотическими. Поэтому режимы глобальной квазисинхронизации могут подразделяться на *регулярные, квазирегулярные и хаотические режимы глобальной квазисинхроннизаци.*

- *Режим частичной квазисинхронизации* генераторов ансамбля, который характеризуется обращением в ноль усредненных разностей частот колебаний отдельных пар генераторов ($< y_i >=0$). В фазовом пространстве такому режиму соответствуют аттракторы, ограниченный по фазовой координате (координатам) φ_i. Аналогично режиму глобальной квазисинхронизации режимы частичной квазисинхронизации подразделяются на *регулярные, квазирегулярные и хаотические режимы частичной квазисинхронизации.*

- *Режимы биений*, при которых все разности фаз между генераторами ансамбля неограниченно нарастает либо убывает. Этим режимам в фазовом пространстве соответствуют вращательные и колебательно-вращательные аттракторы, неограниченные ни по одной из фазовых координат φ_i. Вращательные и колебательно-вращательные аттракторы отличаются друг от друга тем, что на вращательных аттаркторах координата φ_i нарастает (убывает) постоянно, а на колебательно-вращательных данный процесс содержит колебательные стадии. Так же как и режимы глобальной и частичной квазисинхронизации режимы биений могут быть регулярными и хаотическими.

- *Режим частичной синхронизации* генераторов ансамбля, при котором частоты колебаний отдельных генераторов равны, т.е. разность частот $y_{i,j} = d(\theta_i - \theta_j)/dt$ равны нулю, где i и j номера синхронизованных между собой генераторов ансамбля. Образами этих режимов в фазовом пространстве динамических моделей являются регулярные (предельные циклы), квазирегулярные (инвариантные торы) или хаотические аттракторы с определенной топологией. Топология аттракторов, соответствующих режиму частичной синхронизации, характеризуется наличием индексов i и j таких, что некоторая величина $y_{i,j}$, отражающая разность частот колебаний i-го и j-го генераторов, равна некоторой константе, в частности нулю.

Особенностью рассматриваемого ансамбля является то, что разность частот y_n колебаний первого и последнего генераторов определяется равенством $y_n = -y_1 - y_2 - ... - y_{n-1}$, из которого следует, что усредненная разность частот $<y_3> = -(<y_1> + <y_2> + ... + <y_{n-1}>)$ может обращаться в ноль при ненулевых средних разностях частот генераторов. Вращательные аттракторы модели (4.4), на которых переменные φ_i и вращаются в среднем со скоростью, которая компенсируется друг другом, также соответствуют режиму частичной квазисинхронизации.

В традиционных представлениях о системах ФАП в качестве основного динамического режима ранее рассматривался режим синхронизации. Он обладает двумя характеристиками – величиной *полосы удержания режима синхронизации* и величиной *полосы захвата в режим синхронизации. Полоса удержания режима синхронизации* соответствует диапазонам начальных частотных расстроек $\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$, в которых происходит удержание режима синхронизации. Под *полосой захвата в режим синхронизации* понимается область начальных частотных расстроек $\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$, в которой режим синхронизации устанавливается при любых начальных условиях.

Объединение систем ФАП в ансамбли, а также изучение динамики систем ФАП со сложными фильтрами обусловили интерес к исследованию других динамических режимов – квазисинхронных. Для них можно ввести аналогичные характеристики – полоса захвата и полоса удержания.

4.3 Ансамбль из двух элементов

Рассмотрим ансамбль из двух фазовых систем (рис.4.2) с фильтрами первого порядка в цепях управления ($K_i(p) = (1+T_ip)^{-1}$, где T_i – постоянные времени фильтров) и синусоидальной характеристикой фазовых дискриминаторов. В этом случае из (4.12), учитывая условия кольца $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$, сначала получаем символическое уравнение для разности фаз $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ колебаний генераторов ансамбля

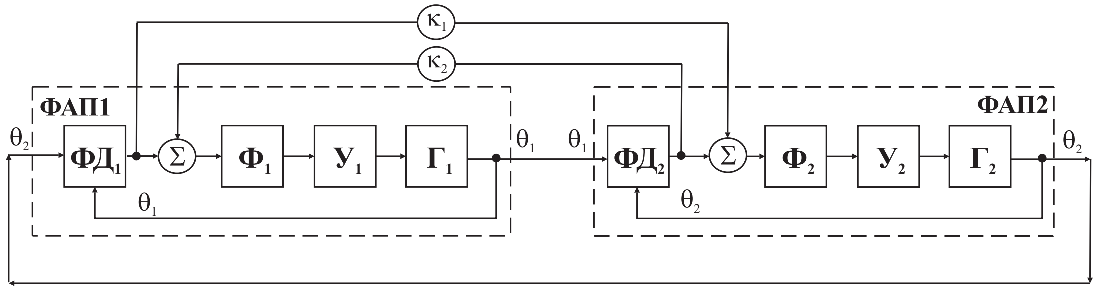


Рис. 4.2: Структурная схема кольцевого из двух фазовых систем.

$$\frac{p\varphi}{\Omega_1} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega_1} - [K_2(p)(1-\kappa_1)b + K_1(p)(1-\kappa_2)]F(\varphi), \tag{4.5}$$

далее, учитывая характеристику фазовых дискриминаторов и вид фильтров, приходим к следующей динамической системе:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, \quad \frac{dy}{d\tau} = z, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\frac{dz}{d\tau} &= \gamma - [(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2]\sin\varphi - \{1 + [\varepsilon_1(1-\kappa_1)b + \\ &\quad + \varepsilon_2(1-\kappa_2)]\cos\varphi\}y - (\varepsilon_1+\varepsilon_2)z, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $\tau = \Omega_1 t$ – безразмерное время. Система (4.6) определена в трехмерном цилиндрическом фазовом пространстве U:$\{\varphi(mod 2\pi), y, z\}$ и шестимерном пространстве безразмерных параметров Λ:$\{\gamma{=}(\omega_2-\omega_1)/\Omega_1,\ \varepsilon_1{=}T_1\Omega_1{>}0,\ \varepsilon_2{=}T_2\Omega_1{>}0,\ b{=}\Omega_2/\Omega_1{>}0,\ \kappa_1,$ $\kappa_2\}$. В силу инвариантности системы (4.6) относительно замены $\Pi{:}(-\gamma,-\varphi,-y,-z) \Rightarrow (\gamma,\varphi,y,z)$ достаточно рассмотреть $\gamma{\geq}0$. Задача исследования динамики ансамбля по модели (4.6) включает в себя выявление возможных аттракторов модели, установление соответствия между этими аттракторами и динамическими режимами ансамбля, изучение бифуркаций аттракторов, выделение в пространстве параметров областей с различным динамическим поведением.

4.3.1 Случай $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ll 1$.

Инерционность систем ФАП определяется постоянными времени фильтров T_1 и T_2. Если $T_1 T_2 \ll 1$ модель (4.6) имеет малый параметр при производной $dz/d\tau$. В этом случае движения в фазовом пространстве U разделяются на *«быстрые»* и *«медленные»*. Поверхность медленных движений $Q_1 : z = \{\gamma - [(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2]\sin\varphi - \{1 + [\varepsilon_1(1-\kappa_1)b + \varepsilon_2(1-\kappa_2)]\cos\varphi\}y\}/(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ является устойчивой, поведение фазовых траекторий в ее малой окрестности определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, \\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{dy}{d\tau} &= \gamma - [(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2]\sin\varphi - \{1 + [\varepsilon_1(1-\kappa_1)b + \\ &\quad + \varepsilon_2(1-\kappa_2)]\cos\varphi\}y, \end{aligned} \tag{4.7}$$

заданной на фазовом цилиндре U_1:$\{\varphi(mod 2\pi), y\}$.

Если $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ll 1$, то фазовые траектории модели (4.7) также разделяются на *быстрые* и *медленные*. Медленные движения удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, \\ y &= \frac{\gamma - [(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2]\sin\varphi}{\{1 + [\varepsilon_1(1-\kappa_1)b + \varepsilon_2(1-\kappa_2)]\cos\varphi\}} \equiv Q(\varphi). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Устойчивость кривой медленных движений $y = Q(\varphi)$ определяется выражением $\sigma = 1 + [\varepsilon_1(1-\kappa_1)b + \varepsilon_2(1-\kappa_2)]\cos\varphi$. В предельном случае $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0)$ кривая $y = Q(\varphi)$ устойчива, динамика на ней оправляется уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \gamma - [(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2]\sin\varphi. \tag{4.9}$$

Непрерывная зависимость решений модели (4.6) от параметров ε_1 и ε_2 позволяет исследовать динамику этой модели путем последовательного продолжения по параметрам бифуркаций моделей (4.7) и (4.9) меньшей размерности. Далее представлены сведения о динамике ансамбля в двух случаях: когда оба элемента ансамбля являются малоинерционными $((\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ll 1)$ и когда малоинерционным являются хотя бы один элемент ансамбля $(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ll 1)$.

Рассмотрим случай $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ll 1$. Динамическая система (4.9) определена на окружности $S = \{\varphi mod(2\pi)\}$. Эта модель допускает существование двух состояний равновесия: O_1 с координатой $\varphi_1^* = \arcsin(\gamma/[(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2])$ и O_2 с координатой $\varphi_2^* = \pi - \varphi_1^*$. Оба состояния равновесия могут быть устойчивыми, т.е. определять синхронные режимы. Пусть аттрактор O_1 соответствует синхронному режиму

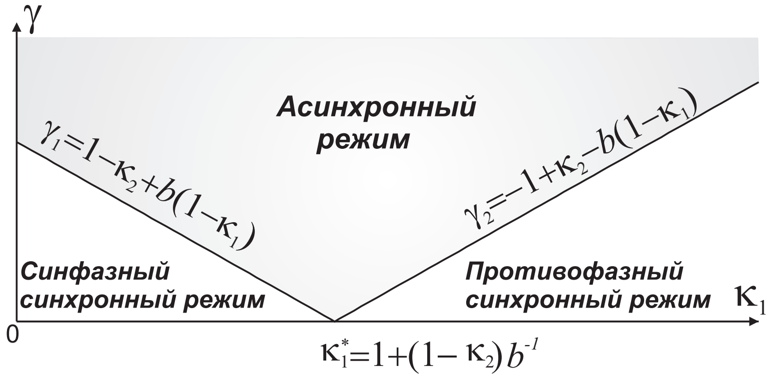


Рис. 4.3: Структура пространства параметров модели (4.9) в сечении (κ_1, γ).

I_{S1}, аттрактор O_2 – синхронному режиму I_{S2}. Разница между режимами I_{S1} и I_{S2} определяются значениями остаточной ошибки по фазе φ^*. Поскольку при $\gamma = 0$ в синхронном режиме I_{S1} фазовая ошибка $\varphi^* = 0$, а в режиме I_{S2} эта ошибка $\varphi^* = \pi$, то синхронный режим I_{S1} будем называть синфазным, а I_{S2} - противофазным. При $\gamma \neq 0$ разница между фазовыми ошибками φ_1^* и φ_2^* режимов I_{S1} и I_{S2} сохраняется. Вне области существования состояний равновесия фазовая переменная φ постоянно возрастает, что соответствует асинхронному режиму. Граница локальной устойчивости состояния равновесия определяется выражением (4.10), а глобальная устойчивость может нарушаться как в результате появления асинхронных, так и квазисинхронных режимов.

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + [b\varepsilon_1^2(1-\kappa_1)] + \varepsilon_2^2(1-\kappa_2)] \cos\varphi_i^* = 0 \tag{4.10}$$

На рис.4.3 представлено разбиение плоскости параметров (κ_1, γ) на области с различным динамическим поведением.

4.3.2 Случай $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ll 1$.

Модель (4.7) описывает динамику ансамбля в случаях, когда хотя бы одна одна из объединяемых систем имеет малоинерционную цепь управления. Пусть цепь управления ФАП2 является безинерционной (ε_2=0). Рассмотрим далее поведение ансамбля в случае реализации синфазного синхронного и противофазного синхронного режимов.

Результаты моделирования динамики системы (4.7) при ε_2=0, κ_1=3, κ_2=−12, b=6 приведены на рис.4.4. При таких параметрах в ансамбле реализуется синфазный синхронный режим. Разбиение плоскости $\{\varepsilon_1, \gamma\}$ на рис.4.4*a* определяется пятью бифуркационными кривыми:

линия 1 – кривая $\gamma^{fold} = 1 - \kappa_2 + b(1-\kappa_1)$ бифуркации двукратного состояния

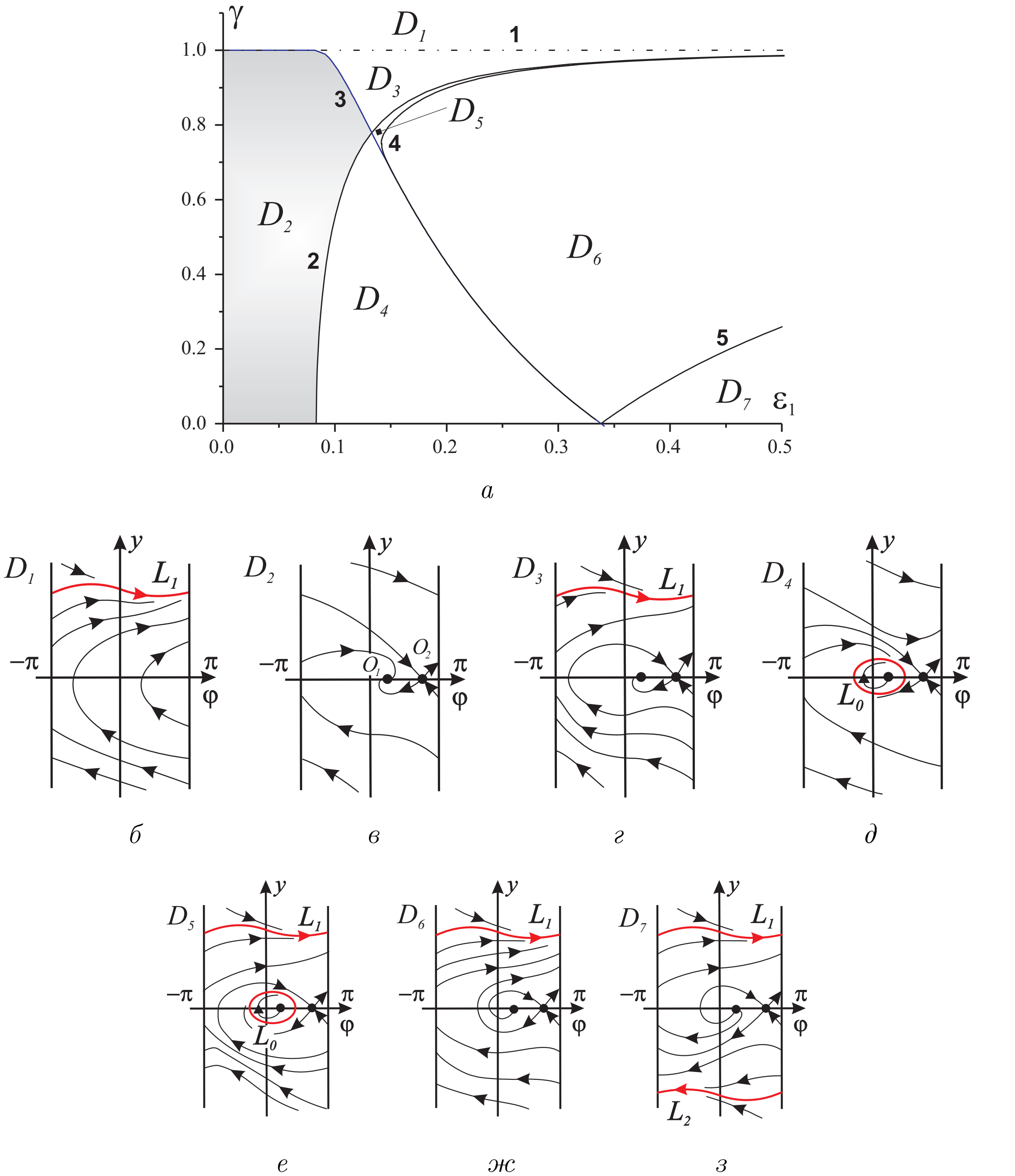


Рис. 4.4: Структура плоскости параметров $\{\varepsilon_1, \gamma\}$ и фазовые портреты модели (4.5) при реализации синфазного синхронного режима.

равновесия $O_{1,2}$. При пересечении этой линии сверху вниз на фазовом цилиндре U_1 появляются состояния равновесия O_1 типа устойчивый узел и O_2 – седло (рис.4.4*в*);

линия 2 – кривая бифуркации Андронова-Хопфа, определяемая равенством $\varepsilon_1^{Hopf} = [(\kappa_1 - 1)b\cos\varphi_1^*]^{-1}$. При пересечении этой линии сверху вниз (слева на право) состояния равновесия O_1 мягко теряет устойчивость, в результате чего на фазовом цилиндре U_1 появляется устойчивый предельный цикл 1-го рода L_0 (рис.4.4*д*);

линия 3 – кривая бифуркации петли сепаратрис 2-го рода, образованной сепаратрисами седла O_2 (седло-узла $O_{1,2}$), расположенными на фазовом цилиндре U_1 в области $y > 0$. При пересечении этой линии снизу в верх на фазовом цилиндре U_1 появляется устойчивый предельный цикл 2-го рода L_1 (рис.4.4*г*);

линия 4 – кривая бифуркации петли сепаратрис 1-го рода, образованной сепаратрисами, расположенными слева от состояния равновесия O_2. На этой линии предельный цикл L_0 «влипает» в петлю сепаратрис;

линия 5 – кривая бифуркации петли сепаратрис 2-го рода, образованной сепаратрисами, расположенными на фазовом цилиндре U_1 в области $y < 0$. При пересечении этой линии сверху вниз на фазовом цилиндре U_1 появляется устойчивый предельный цикл 2-го рода L_2 (рис.4.4*з*).

Линии 1–5 разбивают плоскость параметров на семь областей $D_1 - D_7$ с различным фазовыми портретами. При значениях параметров из области D_1 структуру фазового пространства модели (4.7) определяет единственная особая траектория – устойчивый предельный цикл L_1(рис.4.4*б*). Этот аттрактор определяет режим биений I_{A1} при котором разность фаз φ постоянно нарастает, а усредненная разность частот $\tilde{y} = y_0 > 0$. В области D_2 фазовый портрет системы (4.7) имеет две особые траектории: устойчивое состояние равновесия O_1 и седловое O_2 (рис.4.4*в*). Это область глобальной устойчивости ансамбля, здесь всегда реализуется синфазный синхронный режим I_{S1}. В области D_3 в фазовом пространстве U_1 существует два аттрактора: состояние равновесия O_1 и предельный цикл L_1 (рис.4.4*г*). Бассейны притяжения этих аттракторов разграничивают сепаратрисы седла O_2. В зависимости от начальных условий здесь в ансамбле могут реализовываться как синхронный режим I_{S1}, так и асинхронный режим I_{A1}. В области D_4 единственным аттрактором модели (4.7) является предельный цикл L_0 (рис.4.4*д*). Цикл L_0 определяет квазисинхронный режим ансамбля I_{K1}, в котором разность фаз φ и частот y изменяются в некоторых пределах, но усредненная разность частот $\tilde{y} = 0$. В области D_5 предельный цикл L_0 существует совместно с предельным циклом L_1 (рис.4.4*е*). Эта область бистабильного поведения ансамбля, когда возможна как реализация квазисинхронного режима I_{K1}, так и асинхронного I_{A1}. Бассейны притяжения аттракторов L_0 и L_1 разграничивают сепаратрисы седла O_2. В области D_6 фазовый портрет системы определяют предельный цикл L_1 и неустойчивые состояния равновесия O_1 и O_2 (рис.4.4*ж*). Поскольку в области D_6 единственным аттрактором модели (4.7) является цикл L_1, то поведение ансамбля в этой области аналогично поведению ансамбля при значениях параметров из области D_1. В области D_7 структуру фазового пространства определяют неустойчивые состояния равновесия O_1 и O_2, а также устойчивые предельные циклы 2-го рода L_1 и L_2 (рис.4.4*з*). Аттракторы L_1 и L_2 определяют асинхронные режимы биений I_{A1} и I_{A2}, которые различаются знаками усредненных значений разности частот $\tilde{y}$ – в режиме I_{A1} усредненное значение $\tilde{y} > 0$, в режиме I_{A2} – $\tilde{y} < 0$.

Рассмотрим теперь динамику ансамбля в случае существования противофазного синхронного режима. Результаты моделирования динамики ансамбля при ε_2=0, κ_1=−1, κ_2=14, b=6 представлены на рис.4.5.

В области D_1 единственным аттрактором системы (4.7) является вращательный предельный цикл L_1, отвечающий за режим биений. Границей области D_1 служит *линия 1*, отражающая бифуркацию двукратного состояния равновесия. При пересечении этой линии сверху вниз в фазовом пространстве модели (4.7) появляются состояния равновесия: седло O_1 и устойчивый узел O_2. Состояние равновесие O_2 устойчиво выше *линии 2*, соответствующей бифуркации Андронова-Хопфа. В области D_2 состояние равновесия O_2 глобально устойчиво, эта область является областью захвата в противофазный синхронный режим. В области D_3 аттрактор O_2 существует совместно с циклом L_1, область $D_Z = D_2 \cup D_3$ является областью удержания противофазного синхронного режима. При выходе из области D_Z через *линию 2* состояние равновесия O_2 теряет устойчивость, вокруг него мягко рождается колебательный предельный цикл L_0, отвечающий за квазисинхронный режим. В области параметров D_4 цикл L_0 глобально устойчив, в области D_5 он существует вместе с циклом L_1. Область $D_{Z1} = D_4 \cup D_5$ существования квазисинхронного режима ограничена справа *линией 3*. На этой линии цикл L_0 исчезает в петлю сепаратрис седла O_1. Поведение генераторов ансамбля в области D_6 аналогично поведению при значениях параметров из области D_1. Цикл L_1 разрушается при переходе через *линию 4*, которая соответствует бифуркации петли сепаратрис 2-го рода, образованной сепаратрисами седла O_1, расположенными в области $y > 0$. *Линия 5* соответствует бифуркации петли сепаратрис седла O_1, расположенной в области $y < 0$. При пересечении этой линии сверху вниз рождается устойчивый предельный цикл L_2. Эта бифуркация соответствует рождению в фазовом пространстве вращательного предельного цикла L_2. В области D_6 имеют место два асинхронных режима, определяемые циклами L_1 и L_2.

Выявлено, что в ансамбле, состоящем из двух систем ФАП могут существовать два синхронных режима - синфазный и противофазный, наличие которых определяется параметрами дополнительных связей κ_1, κ_2 и соотношением полос удержания b. Для синфазного и противофазного режима в случае, когда цепь управления второго генератора является малоинерционной, было проведено исследование про-

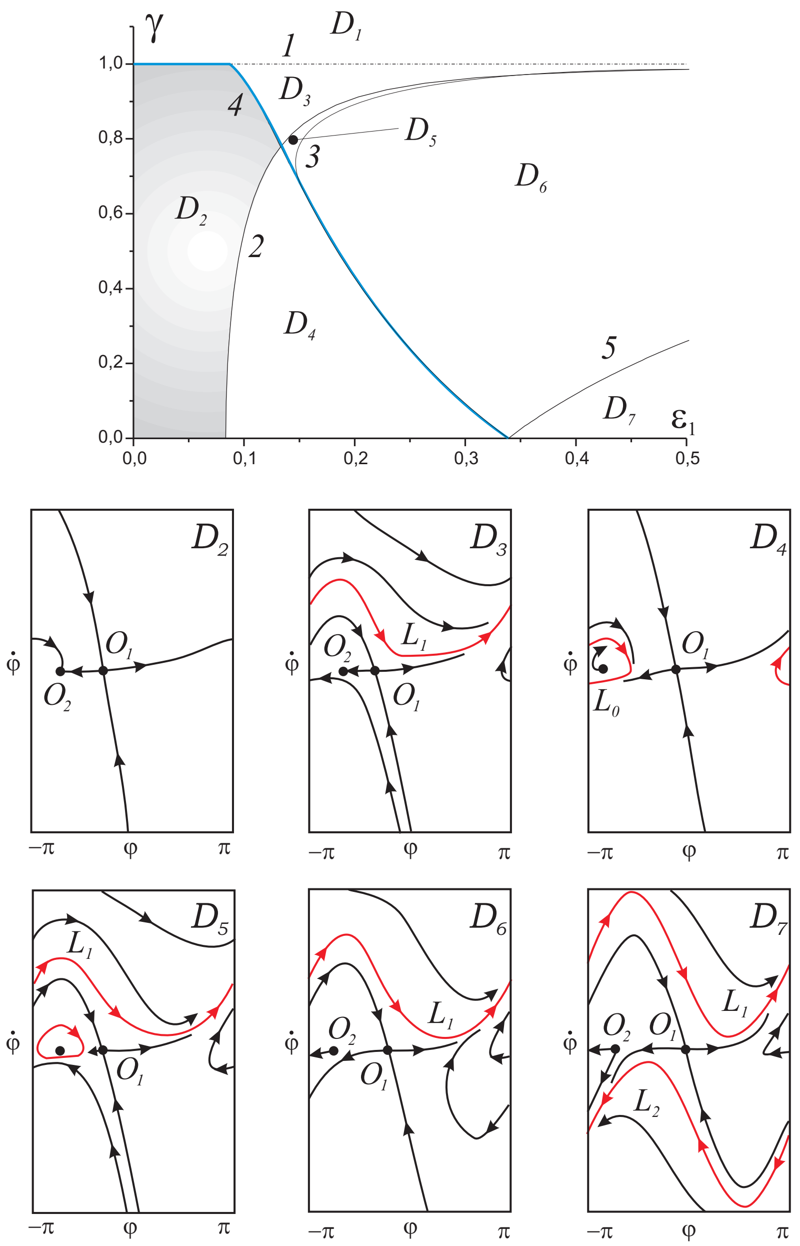


Рис. 4.5: Структура плоскости параметров $\{\varepsilon_1, \gamma\}$ и фазовые портреты модели (4.5) при реализации противофазного синхронного режима.

странства параметров. В результате было получено, что ансамбль может работать в синхронном режиме, регулярном квазисинхронном режиме и в регулярном режиме биений. Установлено, что увеличение инерционности второго генератора приводит к переводу ансамбля в квазисинхронный режим, а затем, при дальнейшем увеличении инерционности, - к переводу в режим биений. Установлено, что переход от синхронного режима к квазисинхронному осуществляется в результате бифуркации Андронова-Хопфа, а границами областей существования режимов биений являются кривые бифуркации петли сепаратрис 2-го рода. Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что динамика двух систем ФАП, объединенных в кольцо с одной малоинерционной цепью управления в случае реализации синфазного синхронного режима и противофазного синхронного режима качественно не различаются - параметрические портреты ансамбля повторяют друг друга.

4.3.3 Инерционные системы

Случай синфазного синхронного режима

Особенности динамики модели (4.5) характеризует приведенный на рис.4.6 параметрический портрет $\{\varepsilon_2, \gamma\}$. Он получен путем продолжения по параметру ε_2 бифуркационных кривых параметрического портрета $\{\varepsilon_1, \gamma\}$ модели (4.7) на уровне ε_1=4. При ε_1=4 в области положительных γ система (4.7) содержит области D_1, D_3, D_5, D_6 и D_7 с соответствующими фазовыми портретами на рис.4.4*б, г, е, ж, з*. При $\varepsilon_2 \ll 1$ динамика модели (4.5) аналогична динамики модели (4.7), параметрические портреты этих моделей определяют *линии 1-4*, которые принадлежат соответственно одним и тем же бифуркационным поверхностям. При увеличении ε_2 установленные структуры фазового и параметрических пространств трансформируются, эти изменения связаны как с аттракторами выявленными ранее, так и возникающими вновь. Линии на рис.4.6, не имеющие обозначений, соответствуют бифуркациям аттракторов вращательного типа, причем здесь приведены бифуркационные кривые только тех аттракторов, у которых среднее значение $\tilde{y} > 0$. Кривые, соответствующие бифуркациям аттракторов со средним значением $\tilde{y} < 0$, получаются из приведенных бифуркационных кривых аттракторов вращательного типа путем зеркального отображения их относительно оси абсцисс. Аналогичным способом из *линии 3* получается *линия 5*, которая имеет место на рис.4.4, а на рис.4.6 не приведена.

На рис.4.6 выделены области существования динамических режимов с различными характеристиками.

G_2 – область глобальной устойчивости системы (4.5). Здесь единственным аттрактором модели является состояние равновесия O_1, отвечающее за режим синхронизации I_{S1}. При значениях параметров из области G_2 режим синхронизациии

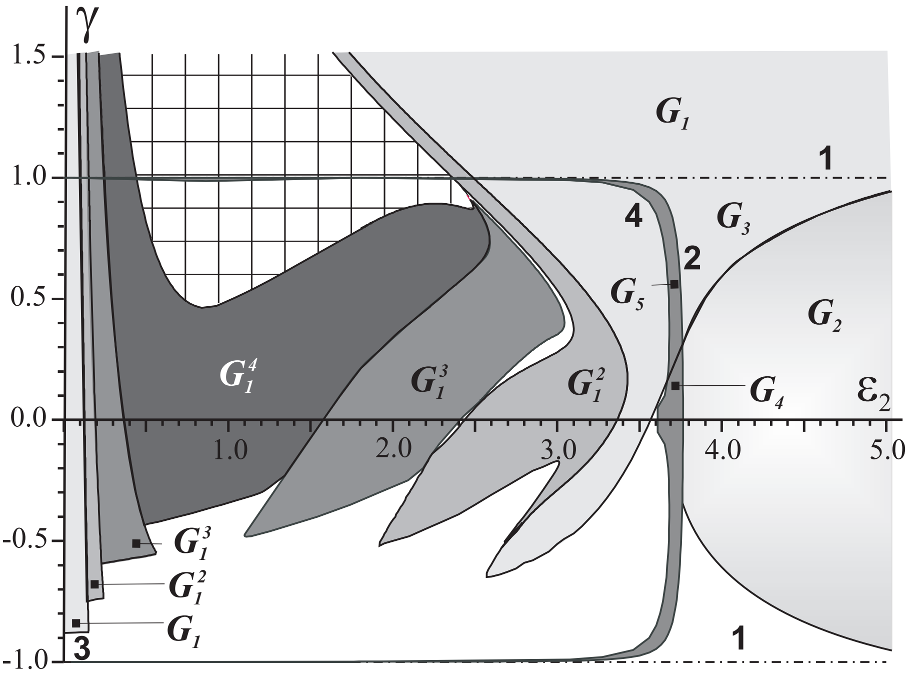


Рис. 4.6: Структура пространства параметров модели (4.5) в сечении (ε_2, γ) при b=6, κ_1=3, κ_2=$-$ 12, ε_1=4.

I_{S1} реализуется при любых начальных условиях, такую область принято называть областью захвата в синхронный режим I_{S1} [45];

G_4 – область захвата в квазисинхронный режим I_{K1}. Здесь единственным аттрактором модели (4.5) является колебательный предельный цикл L_0 (рис.4.7*е*);

G_1, G_1^2, G_1^3, G_1^4 – области захвата в режимы биений $I_{A1}, I_{A2}, I_{A3}, I_{A4}$. Это области существования предельных циклов $L_1, L_1^{(2)}, L_1^{(3)}$, $L_1^{(4)}$ (рис.4.7*а-г*), с периодами T, $2T$, $3T$, $4T$ соответственно. Зона размещения областей G_1^k, для k>4 отмечена штриховкой;

G_3 и G_5 – области бистабильного поведения, при значениях параметров из этих областей в фазовом пространстве U цикл L_1 существует совместно либо с устойчивым состоянием равновесия O_1 (область G_3), либо с циклом L_0 (область G_5).

Рассмотрим некоторые перестройки фазового и параметрического портретов модели (4.5), которые происходят с увеличением значений параметра ε_2. При увеличении ε_2 изменения в первую очередь затрагивают предельный цикл L_1. Он либо теряет устойчивость через бифуркацию удвоения периода, порождая при этом устойчивый предельный цикл удвоенного периода $L_1^{(2)}$, либо исчезает в результате одной из трех бифуркаций: двукратного предельного цикла, петли сепаратрис 2-го рода, замкнутого контура из сепаратрис седло-фокусов O_2 и O_1. Таким образом при росте ε_2 меняется характер границы области существования предельного цикла L_1, а также появляется область G_1^2 существования предельного цикла $L_1^{(2)}$. При дальнейшем увеличении ε_2 предельный цикл $L_1^{(2)}$ испытывает те же бифуркации, через

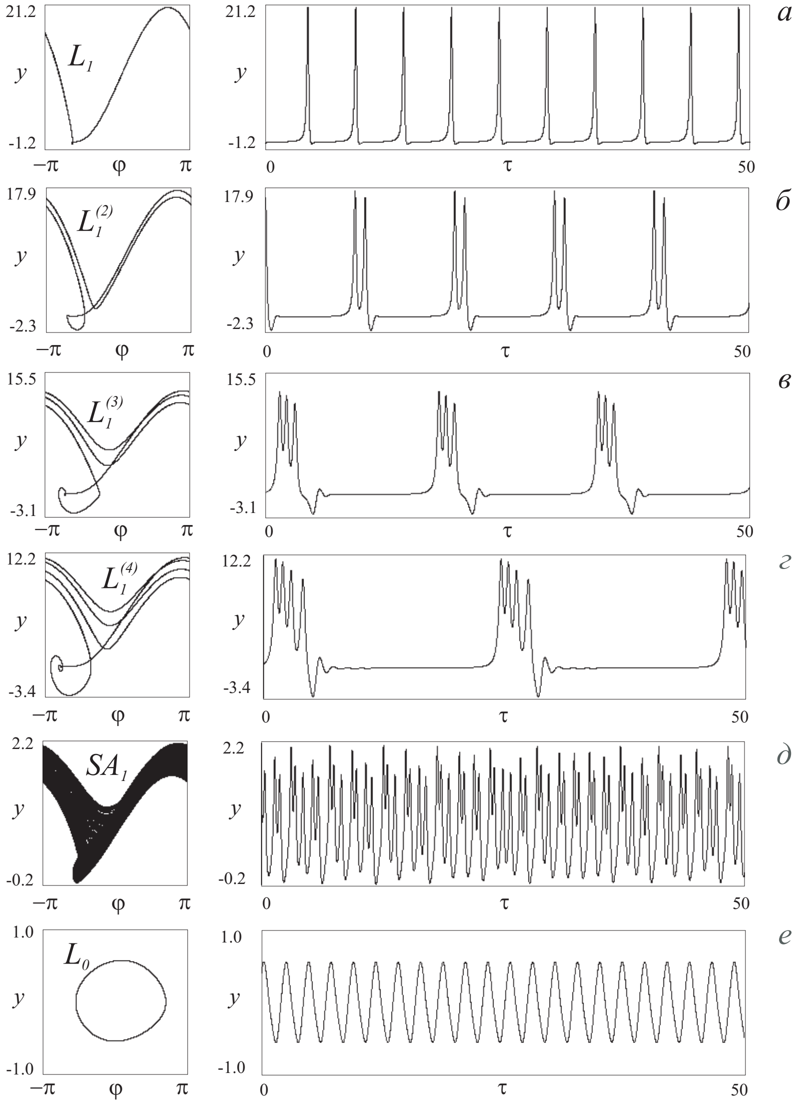
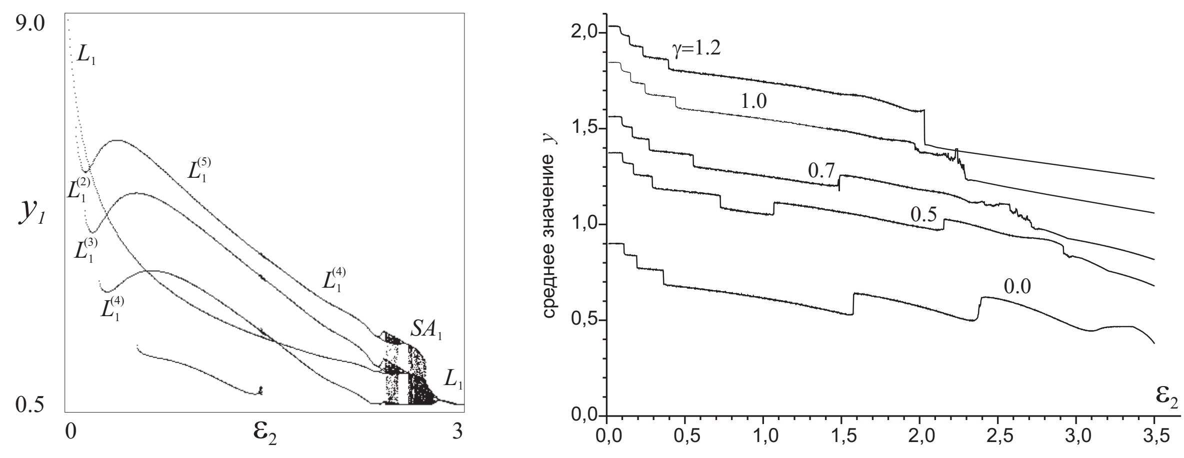


Рис. 4.7: Примеры аттракторов модели (4.5), соответствующие режимам регулярных (*а-г*) и хаотических (*д*) биений, а также регулярному квазисинхронному режиму (*е*).

которые проходил предельный цикл L_1 с той лишь разницей, что петля сепаратрис в которую исчезает предельный цикл $L_1^{(2)}$ является двух обходной, а сепаратрисный контур образован сепаратрисами состояний равновесия $O_2(\varphi_2^*-2\pi,0,0), O_1(\varphi_1^*,0,0)$, и $O_2(\varphi_2^*,0,0)$]. В результате бифуркаций предельного цикла $L_1^{(2)}$ происходит рождение предельных циклов $L_1^{(4)}$ или $L_1^{(3)}$. В пространстве параметров появляются области G_1^4 или G_1^3. Структура границ областей G_1^4 и G_1^3 аналогична структуре областей G_1 и G_1^2. Дальнейшее увеличение ε_2 в зависимости от значений фиксированных параметров может привести либо к появлению циклов $L_1^{(k)}$ кратности $k>4$, либо к обратной ситуации, т.е. к уменьшению индекса кратности циклов k. Структура границ областей G_1^k существования предельных циклов $L_1^{(k)}$ качественно сохраняется, они состоят из бифуркационных кривых двукратных предельных циклов кратности k, удвоения периодов циклов, k-обходных петель сепаратрис второго рода и контуров, составленных из сепаратрис состояний равновесия O_1 и O_2, которые до замыкания контура охватывают фазовый цилиндр k раз. Области существования предельных циклов L_1^k с соседними числами кратности либо примыкают к друг к другу по бифуркационным кривым сепаратрисных связок и двойных предельных циклов, либо разделены буферными зонами со сложной динамикой. В областях со сложной динамикой модель (4.5) характеризуется наличием хаотического вращательного аттрактора (рис.4.7*д*), эти области могут перекрываться с областями с регулярной динамикой, в результате в пространстве параметров возникают зоны мультистабильного поведения ансамбля.

Вращательные аттракторы модели (4.5) определяют режимы биений, эволюции этих режимов с ростом параметра ε_2 иллюстрируют диаграммы, представленные на рис.4.8. Здесь на рис.4.8а изображена однопараметрическая диаграмма отображения Пуанкаре для значений $\gamma = 0.7$, на рис.4.8*б* представлены зависимости $\tilde{y}(\varepsilon_2)$ для различных значений γ. Из представленных диаграмм видно, что бифуркационный переход от одного аттрактора к другому сопровождается скачкообразными изменениями в характеристиках динамического режима, в частности, переходом режима биений на новую частоту. Переходы через буферные зоны со сложной динамикой скачки частоты сглаживают.



а *б*

Рис. 4.8: Однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре модели (4.5) при $\gamma = 0.7$ – (*а*), зависимости усредненных значений разности частот колебаний генераторов ансамбля от параметра ε_2 – (*б*).

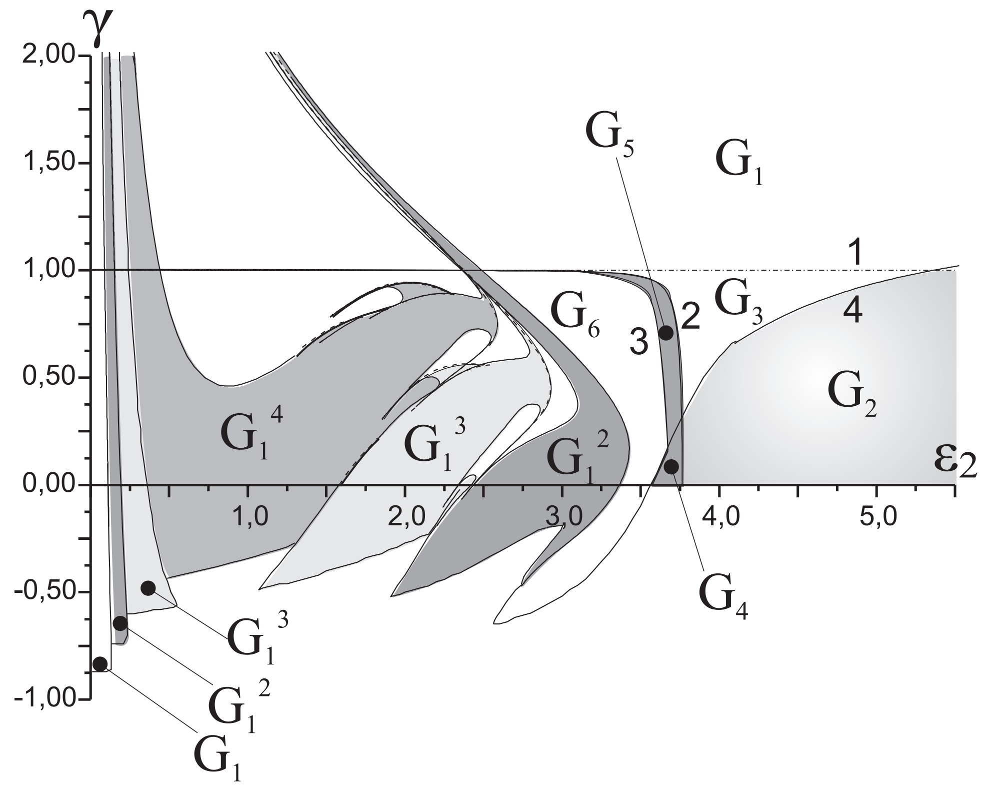
Заметим, что в силу инвариантности преобразования П фазовом пространстве U существуют предельные цикл $L_2^{(k)}$ со средним значением $\tilde{y}<0$, которые испытывают бифуркации аналогичные бифуркациям предельных циклов $L_1^{(k)}$, причем аттракторы со средними значениями больше и меньше нуля могут существовать одновременно, что еще больше усложняет динамику ансамбля.

При рассматриваемых значениях параметров увеличение ε_2 в конечном счете приводит к синхронизации колебаний генераторов ансамбля. Переход из области параметров с асинхронными режимами в область $G_S = G_2 \bigcap G_3$ существования синфазного синхронного режима I_{S1} осуществляется через область $G_K = G_4 \bigcap G_5$ существования квазисинхроного режима I_{K1}. Режиму I_{K1} в фазовом пространстве U соответствует устойчивый колебательный предельный цикл L_0 (рис.4.7e) вокруг состояния равновесия O_1. Режим I_{K1} глобально устойчив в области G_4, в области G_5 он существует совместно с режимом биений I_{A1}. При увеличение ε_2 предельный цикл L_0 стягивается в точку, делая устойчивым состояние равновесия O_1. В результате в ансамбле устанавливается режим I_{S1}, который глобально устойчив в области G_2, а в области G_3 он существует совместно с режимами биений различной сложности. На рис.4.6 область G_2 ограничена бифуркационными кривыми: петли сепаратрис 2-го рода седла O_2, удвоения периода цикла L_1 и нейтрального состояния равновесия O_1, которая находится из условия $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + [\varepsilon_1^2(1-\kappa_1)b + \varepsilon_2^2(1-\kappa_2)]\cos\varphi_1^*{=}0$ (бифуркация Анронова-Хопфа). Примечательно, что в рассматриваемом примере при $\varepsilon_2 > 5.37$ в интервале $-1 < \gamma < 1$ синхронный режим I_{S1} существует и глобально устойчив, т.е. *полоса захвата* в режим синхронизации совпадает *полосой удержания.*

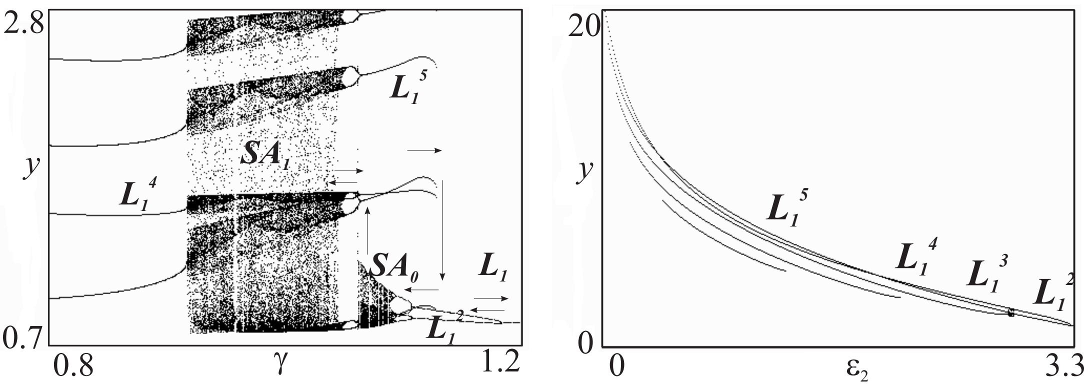
Случай противофазного синхронного режима

Рассмотрим теперь особенности динамики ансамбля в случае реализации противофазного синхронного режима при немалых параметрах инерционности цепей управления. При $\varepsilon_2 \ll 1$ динамика модели (4.5) аналогична динамике модели (4.7), параметрические портреты этих моделей определяют *линии 1-3,5*, которые принадлежат соответственно одним и тем же бифуркационным поверхностям. При увеличении ε_2 установленные структуры фазового и параметрических пространств также как и для случая синфазного синхронного режима трансформируются, эти изменения связаны как с аттракторами, выявленными ранее, так и возникающими вновь.

Линии на рис.4.9a, не имеющие обозначений, соответствуют бифуркациям аттракторов вращательного типа, причем здесь приведены бифуркационные кривые только тех аттракторов, у которых усредненное значение y положительное. Кривые, соответствующие бифуркациям аттракторов со средним отрицательным значением, получаются из приведенных бифуркационных кривых аттракторов вращательного типа путем зеркального отображения их относительно оси абсцисс. Аналогичным способом из *линии 4* получается *линия 5*, которая показана на рис.4.5, а на рис.4.9a не приведена. Области параметров, где поведение генераторов ансамбля, определяемое по моделям (4.5) и (4.7), одинаково, имеют те же обозначения, что на рис.4.5.



а



б *в*

Рис. 4.9: Структура плоскости параметров $\{\varepsilon_2, \gamma\}$ модели (4.5) при $b = 6, \kappa_1 = -1, \kappa_2 = 14, \varepsilon_1 = 4$ (а), однопараметрические бифуркационные диаграммы: эволюции асинхронных режимов при вариации начальной частотной расстройки γ на уровне $\varepsilon_2 = 2.2$ (б), эволюции разности частот колебаний генераторов при увеличении постоянной времени фильтра ε_2 на уровне $\gamma = 0.4$ (в).

Области G_1, G_2^1, G_3^1, G_4^1 - это области существования асинхронных режимов, определяемых устойчивыми циклами L_1, L_2^1, L_3^1 и L_4^1 (рис.4.10*а-г*) с периодами T, $2T$, $3T$ и $4T$ соответственно. Эволюцию разности частот колебаний генераторов иллюстрирует однопараметрическая бифуркационная диаграмма, представленная на рис.4.9*в*. Вращательные аттракторы могут быть хаотическими, они имеют место при значениях параметров из областей, находящихся между областями G_2^1, G_3^1, G_4^1. Переход к режиму хаотических биений осуществляется по сценарию Фейгенбаума, либо через перемежаемость 1-го рода. Рис.4.9*б* иллюстрирует сценарии перехода к режиму хаотических биений и режим мультистабильного поведения. Здесь при увеличении γ из цикла L_4^1 через перемежаемость 1-го рода рождается хаотический аттрактор SA_1 (рис.4.10*е*), этот аттрактор с ростом γ мягко переходит в предельный цикл L_5^1 (рис.4.10*д*), который в свою очередь исчезает в результате касательной бифуркации, и система (4.5) переходит на цикл L_2^1. Цикл L_2^1 появляется из цикла L_1 при уменьшении γ в результате бифуркации удвоения периода. Дальнейшее уменьшение сначала приводит к рождению хаотического аттрактора SA_0 (рис.4.10*ж*) по сценарию Фейгенбаума, а потом его кризису с переходом на цикл L_5^1.

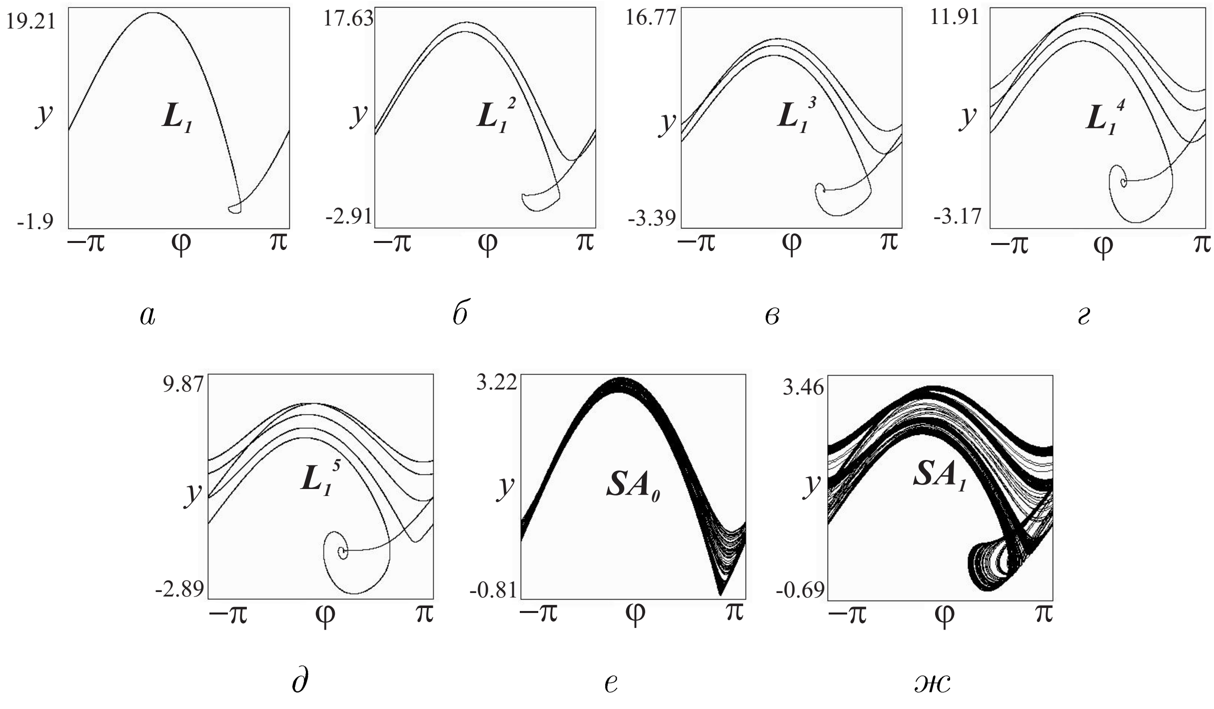


Рис. 4.10: Проекции аттракторов модели (4.5) в случае реализации противофазного синхронного режима

Из параметрического портрета на рис.4.9*а* следует, что увеличение постоянной времени фильтра ε_2 приводит к стабилизации динамики ансамбля. При $\varepsilon_2 = 0$ противофазный синхронный режим существует совместно с асинхронными режимами в

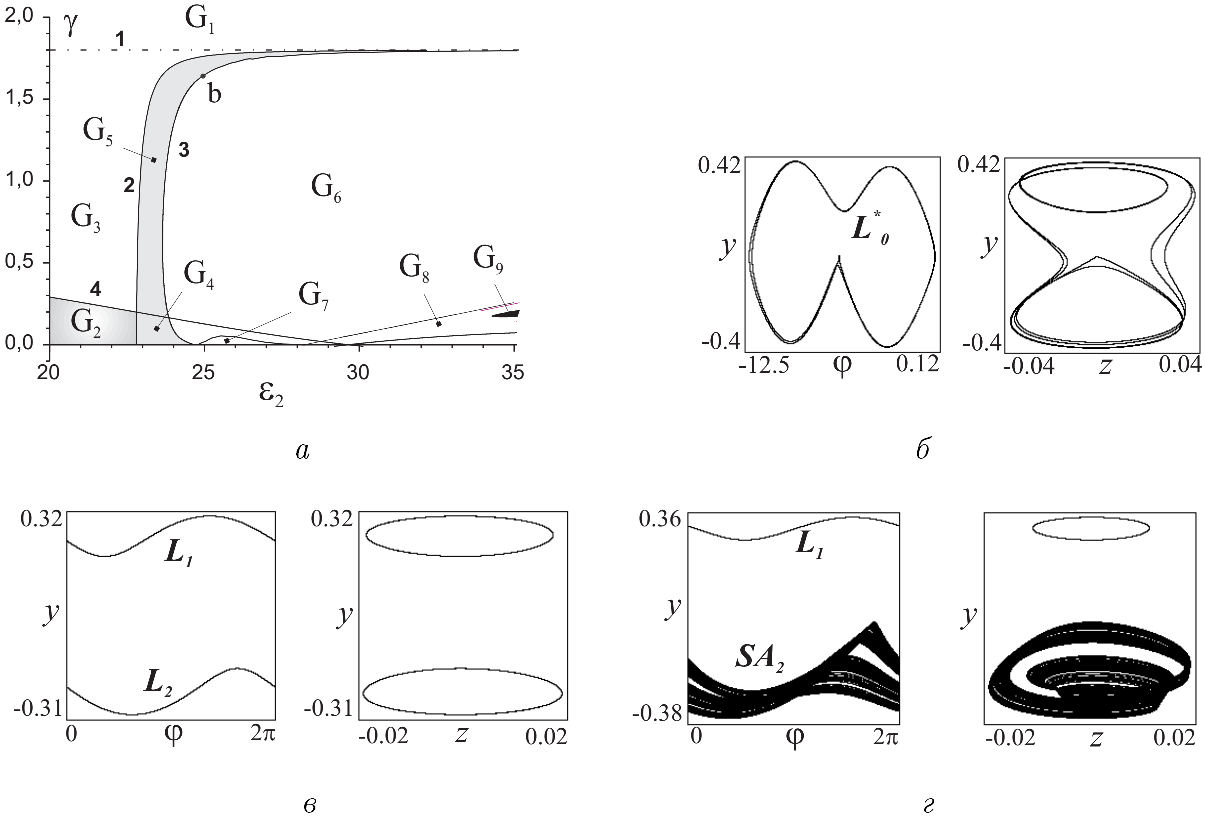


Рис. 4.11: Параметрический портрет модели (4.5) при $b = 1.5, \kappa_1 = 3.2, \kappa_2 = -0.5, \varepsilon_1 = 15$ (а) и фазовые портреты (б-г)

крайне узкой полосе начальной частотной расстройки (полоса удержания синхронного режима практически отсутствует). Увеличение ε_2 сначала ведет к расширению полосы удержания, далее появляется полоса захвата в противофазный синхронный режим (при $\varepsilon_2 = 3.76$), которая с ростом ε_2 расширяется, наконец, начиная с $\varepsilon_2 = 5.36$, полоса захвата уравнивается с полосой удержания. Однако, эффект стабилизации динамики ансамбля с ростом постоянной времени ε_2 не постоянен.

На рис.4.11*а* приведен параметрический портрет модели (4.5), где ε_2 носит дестабилизирующий характер. Характер влияния параметра ε_2 определяется знаком выражения:

$$G \equiv \frac{[1 + 2(1-\kappa_2)\varepsilon_1] + \sqrt{1 + 4(1-\kappa_2)\varepsilon_1[1-(1-\kappa_1)\varepsilon_1 b]}}{1-\kappa_2} \tag{4.11}$$

Если $G < 0$, то ε_2 стабилизирует динамику ансамбля и дестабилизирует в противном случае.

При моделировании динамики модели (4.5) в противофазном синхронном режиме выявлены регулярные и хаотические квазисинхронные режимы с проворотом фазы. В фазовом пространстве U за такие режимы отвечают колебательные аттракторы, амплитуда которых по превышает значение 2π. В качестве примера, на рис.4.11*б* приведена проекция предельного цикла L_0^*, характеризующего регулярный квазисинхронный режим с проворотом фазы. Предельный цикл L_0^* существует в области параметров G_9. При значениях параметров из областей G_7 и G_8 выявлено одновременное существование в U двух вращательных аттракторов рис.4.11*в-г*, причем аттрактор в области отрицательных значений y может быть хаотическим рис.4.11*г*.

Как показали численные эксперименты совпадение полос захвата и удержания сохраняется и при больших значениях ε_2, вплоть до значений $\varepsilon_2 = 10^3$. Отсюда следует что, при кольцевом соединении систем ФАП большая инерционность этих систем может выступать в качестве стабилизирующего фактора, что не свойственно ни парциальным системам, ни изученным к настоящему времени ансамблям фазоуправляемых генераторов с другими типам соединений.

Таким образом, из представленных выше результатов исследований следует, что динамические процессы ансамбля с инерционными цепями, сопровождающие синфазный и противофазны синхронные режимы качественно совпадают. Ансамбль может работать в синхронном режиме, регулярном квазисинхронном режиме, а также в регулярном и хаотическом режиме биений. Установлено, что переход к хаотическим биениям осуществляется по сценарию Фейгенбаума. Обнаружен эффект скачкообразного изменения частоты биений в результате бифуркационного перехода от одного вращательного аттрактора к другому.

Установлено, что динамика ансамбля в противофазном режиме имеет свои особенности, в частности, имеет место квазисинхронный режим с проворотом фазы, а также обнаружена сложная структура границ областей существования различных режимов биений, что приводит к гистерезисным явлениям в системе.

В результате исследований были получены аналитические условия устойчивости синхронных режимов. Показано, что инерционность цепей управления в зависимости от параметров связей может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на синхронный режим; аналитически получено условие стабилизации и дестабилизации.

4.4 Кольцо из трех фазовых систем

4.4.1 Математическая модель

В случае объединения в кольцо трех идентичных систем ФАП (рис.4.12) с одинаковыми полосами удержания b_1=b_2=1, одинаковыми фильтрами первого порядка – $K(p) = (1 + Tp)^{-1}$, где T – постоянные времени фильтров с синусоидальной характеристикой фазовых дискриминаторов получаем следующую систему дифференци-

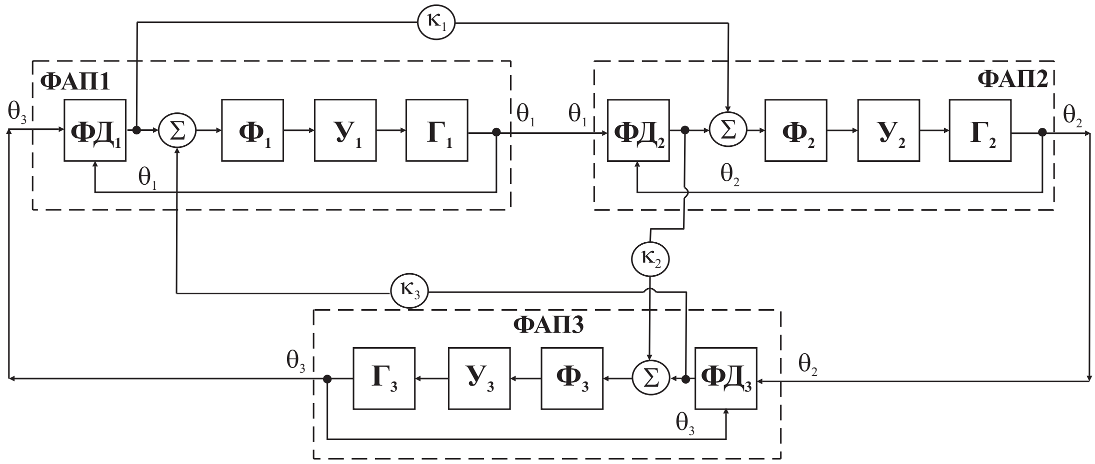


Рис. 4.12: Структурная схема кольцевого ансамбля трех фазовых систем.

альных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, \\
\varepsilon\frac{dy_1}{d\tau} &= \gamma_1 - y_1 - (1-\kappa_1)\sin\varphi_1 - \kappa_2\sin\varphi_2 - \sin(\varphi_1+\varphi_2), \\
\frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, \\
\varepsilon\frac{dy_2}{d\tau} &= \gamma_2 - y_2 + \sin\varphi_1 - (1-\kappa_2)\sin\varphi_2 + \kappa_3\sin(\varphi_1+\varphi_2),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

описывающую динамические процессы рассматриваемого ансамбля. Система (4.12) определена в четырехмерном цилиндрическом фазовом пространстве $V:\{\varphi_1(\mathrm{mod}2\pi), y_1, \varphi_2(\mathrm{mod}2\pi), y_2\}$ с двумя циклическими переменными φ_1 и φ_2. Здесь $\tau = \Omega_1 t$ – безразмерное время, $\varphi_1(\varphi_2)$ - разности фаз колебаний первого и третьего (второго и первого) генераторов, $y_1(y_2)$ – соответствующие разности частот. В (4.12) все параметры безразмерные: $\gamma_1 = (\omega_1-\omega_3)/\Omega_1$ и $\gamma_2 = (\omega_2-\omega_1)/\Omega_1$ – относительные начальные частотные расстройки, $\varepsilon = \Omega_1 T$ - инерционность фильтров, $\kappa_{1,2,3}$ – дополнительные связи. Из модели (4.12) исключены уравнения, описывающие поведение фазовой переменной φ_3, поскольку $\varphi_3 = -(\varphi_2+\varphi_1)$. Задача исследования динамики ансамбля по модели (4.12) состоит в анализе особых траекторий модели (4.12), в частности, аттракторов, установление соответствия между аттракторами и динамическими режимами ансамбля, изучение бифуркаций аттракторов, выделение в пространстве параметров областей с различным динамическим поведением.

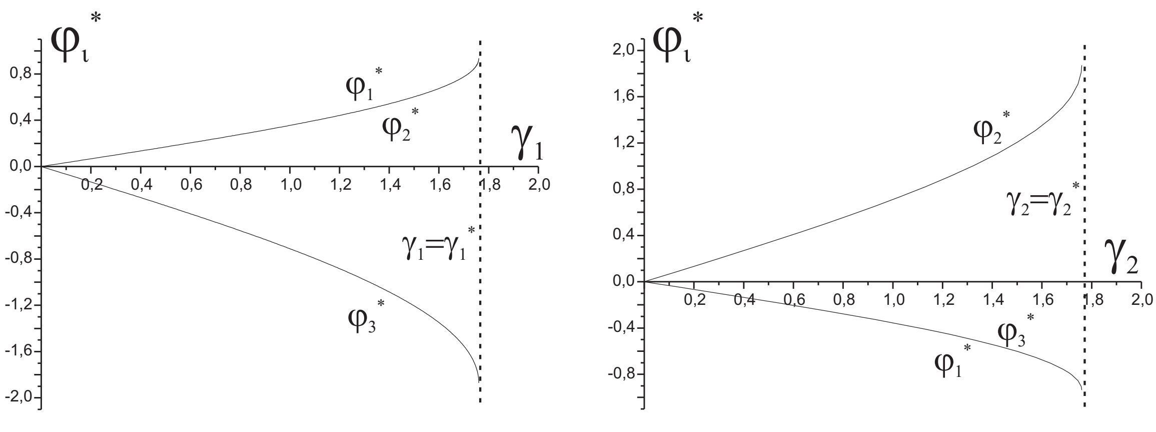
4.4.2 Синхронные режимы

Синхронным режимам соответствуют устойчивые состояния равновесия математической модели (4.12). При этом координаты состояний равновесия по переменным

φ_1, φ_2, $\varphi_3 = -(\varphi_1 + \varphi_2)$ характеризуют ошибки синхронизации подстраиваемых относительно друг друга генераторов. Математическая модель(4.12) может иметь до шести состояний равновесия, три из которых – седловые. Заметим, что координаты состояний равновесия не зависят от параметра фильтров ε. При $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ и $\varepsilon = 0$ состояния равновесия имеют следующие координаты:

$$
\begin{aligned}
O_1(0,0,0,0) \quad &- \quad \text{устойчивый узел} \\
O_2(0,0,\pi,0) \quad &- \quad \text{седло} \\
O_3(-\varphi_1^*,0,-\varphi_2^*,0) \quad &- \quad \text{неустойчивый узел} \\
O_4(-\pi,0,-\pi,0) \quad &- \quad \text{седло} \\
O_5(\varphi_1^*,0,\varphi_2^*,0) \quad &- \quad \text{неустойчивый узел} \\
O_6(-\pi,0,-\pi,0) \quad &- \quad \text{седло}
\end{aligned}
$$

Рассмотрим влияние параметров γ_1 и γ_2 на величину ошибок синхронизации – координат состояния равновесия O_1 по фазовым переменным φ_1 и φ_2. На рис.4.13 представлена зависимость ошибок синхронизации φ^* от начальных частотных расстроек.



(а) (б)

Рис. 4.13: Зависимость ошибок синхронизации математической модели(4.12) при $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ и $\varepsilon = 0$ от начальных частотных расстроек генераторов.

Увеличение начальной частотной расстройки γ_1 (рис.4.13а) либо γ_2 (рис.4.13б) приводит к увеличению ошибок синхронизации. При достижении некоторых значений $\gamma_1 = \gamma_1^*$ или $\gamma_2 = \gamma_2^*$ происходит бифуркация двукратного состояния равновесия, в результате которой грубые состояния равновесия O_1 и O_2 сливаются в одно негрубое – *седло-узел*, которое затем исчезает – осуществляется срыв синхронного режима на режим биений либо на режим частичной квазисинхронизации. Интервалы начальных частотных расстроек $\{-\gamma_1^*, \gamma_1^*\}$ при $\gamma_2 = 0$ и $\{-\gamma_2^*, \gamma_2^*\}$ при $\gamma_1 = 0$ являются полосами удержания синхронного режима.

4.4.3 Асинхронные режимы малоинерционных систем

Допустим, что цепи управления систем ФАП являются малоинерционными, т.е. модель (4.12) имеет малый параметр при производных $dy_1/d\tau$ и $dy_2/d\tau$ ($\varepsilon \ll 1$). В этом случае движения в фазовом пространстве V разделяются на «быстрые» и «медленные». Поверхность медленных движений W, определяемая функциями

$$\begin{aligned} Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1) &\equiv \gamma_1 - y_1 - \sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \\ Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2) &\equiv \gamma_2 - y_2 + \sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 = 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

везде устойчива, так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1)}{\partial y_1} &+ \frac{\partial Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2)}{\partial y_2} = -2 < 0, \\ \frac{\partial Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1)}{\partial y_1}\frac{\partial Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2)}{\partial y_2} &- \frac{\partial Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1)}{\partial y_2}\frac{\partial Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2)}{\partial y_1} = 1 > 0. \end{aligned}$$

Поведение системы (4.12) в малой окрестности поверхности медленных движений W описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \gamma_2 + \sin\varphi_1 - \sin\varphi_2, \end{aligned} \tag{4.14}$$

определенной на фазовом торе $V_1 : \{\varphi_1(mod 2\pi), \varphi_2(mod 2\pi)\}$ и зависящей от параметров γ_1 и γ_2. В силу существенной нелинейности модели (4.14) исследование ее особых траекторий также проведено путем компьютерного моделирования с использованием комплекса программ ДНС [13].

На рис.4.14 приведено разбиение плоскости параметров (γ_1, γ_2) модели (4.14) на области с различным динамическим поведением. Разбиение получено путем компьютерного бифуркационного анализа особых траекторий модели (4.14). Здесь пунктирной линией выделена область D_S существования состояний равновесия. Внутри этой области система (4.14) может иметь шесть, четыре или два состояния равновесия. Области с различным числом состояний равновесия разделены штрихпунктирными линиями. При нулевых частотных расстройках $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, система (4.14) имеет шесть состояний равновесия (рис. 4.15а): O_1 – устойчивое, O_2 , O_4 ,O_6 – седловые, O_3 , O_5 – полностью неустойчивые. С увеличением начальных частотных расстроек число состояний равновесия в системе (4.14) уменьшается сначала до четырех, потом до двух. При выходе из области с шестью состояниями равновесия через штрихпунктирную *линию 1* происходит слияние и исчезновение состояний равновесия O_2 и O_3,

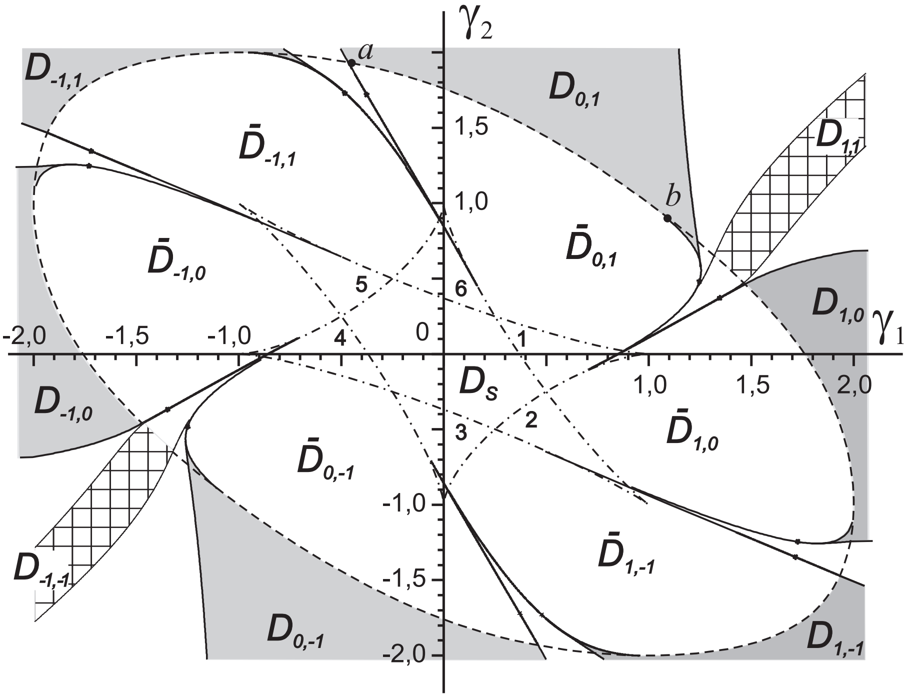


Рис. 4.14: Структура плоскости параметров (γ_1, γ_2) модели (4.14).

линию 2 – O_4 и O_5, *линию 3* – O_6 и O_3, *линию 4* – O_2 и O_5, *линию 5* – O_4 и O_3, *линию 6* – O_6 и O_5. Таким образом, внутри области D_S бифуркации состояний равновесия не затрагивают устойчивого состояния равновесия O_1, определяющего синхронный режим работы ансамбля. Область D_S является областью существования синхронного режима. Бифуркации состояний равновесия перераспределяют фазовые потоки, тем самым влияют на длительность переходных процессов к режиму синхронизации.

Движения на торе, каким является фазовое пространство модели (4.14), принято характеризовать числом вращения ν [8], которое для периодических траекторий либо рационально, либо равно $\pm\infty$, для квазипериодических траекторий число ν иррационально. Число вращения можно представить в виде отношения двух чисел $\nu = i/j$, где i и j определяют число оборотов, совершаемых фазовой траекторией по переменным φ_1 и φ_2. Нарастание переменных φ_1 и φ_2 характеризуют значения i , j положительные, убывание - отрицательные. Таким образом, числа вращения устойчивых предельные циклов, определяющих регулярный режим частичной квазисинхронизации, имеют следующие значения $\nu = 0/1;\ 0/-1;\ 1/0;\ -1/0;\ 1/-1;\ -1/1$. На рис.4.14 серым цветом выделены области параметров, где существуют режимы частичной квазисинхронизации. Фазовые портреты модели (4.14) для значений параметров из областей существования квазисинхроных режимов представлены на рис.4.15б,в,д,е,з,и. Система (4.14) инвариантна относительно преобразования

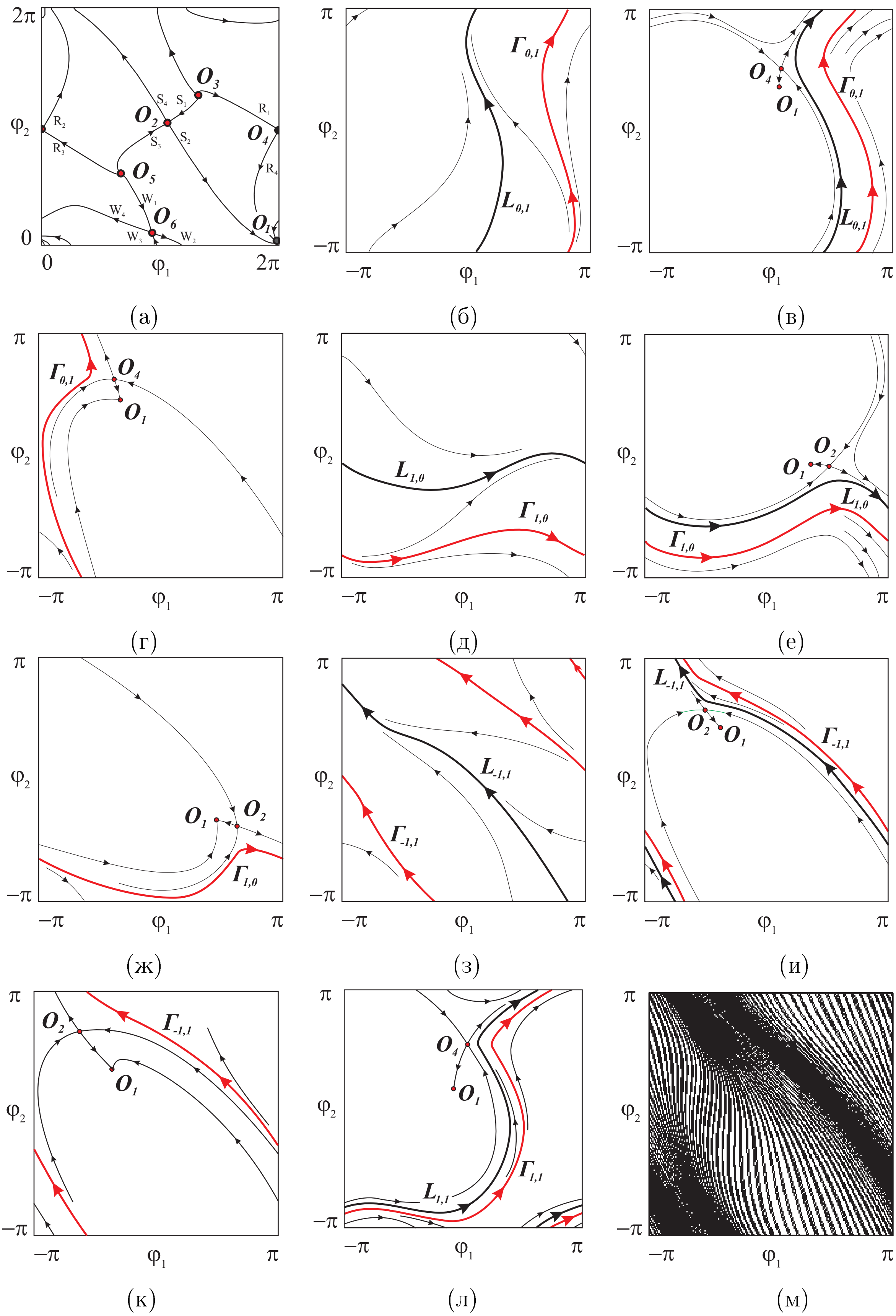


Рис. 4.15: Фазовые портреты модели (4.14) в областях D_Z (а), $D_{0,1}$ (б,в), $\overline{D}_{0,1}$ (г), $D_{1,0}$ (д,е), $\overline{D}_{1,0}$ (ж), $D_{1,-1}$ (з,и), $\overline{D}_{1,-1}$ (к), $D_{1,1}$ (л), квазирегулярного режима биений (м).

$\Pi : (\gamma_1, \gamma_2, \varphi_1, \varphi_2) \to (-\gamma_1, -\gamma_2, -\varphi_1, -\varphi_2)$, поэтому фазовые портреты приведены лишь для областей расположенных в области положительных значений γ_1. Области существования режимов частичной квазисинхронизации имеют одинаковую структуру, их границами служат бифуркационные кривые петель сепаратрис седел и седло-узлов, а также двукратных предельных циклов [**?**].

Рассмотрим структуру областей существования режимов частичной квазисинхронизации и трансформацию соответствующих этим областям фазовых портретов на примере области $D_{0,1}$ (рис.4.14). При значениях параметров вне области D_S фазовый портрет системы (4.14) содержит два предельных цикла: устойчивый $L_{0,1}$ и неустойчивый $\mathit{\Gamma}_{0,1}$ (рис.4.15б). При выходе из области $D_{0,1}$ через левую или правую границу предельные циклы сливаются и исчезают в результате касательной бифуркации. При выходе из области $D_{0,1}$ через пунктирную линию, между точками a и b, в результате петли сепаратрис седло-узла исчезает цикл $L_{0,1}$, неустойчивый цикл $\mathit{\Gamma}_{0,1}$ сохраняется (рис.4.15б). Из бифуркационного анализа следует, что области квазисинхронных режимов могут проникать в область D_S, порождая тем самым области с бистабильным поведением – совместного существования синхронного и квазисинхронного режимов. Области бистабильного поведения имеют клинообразный вид, границами этих областей служат бифуркационные кривые "устойчивых"петель сепаратрис (с отрицательной седловой величиной $\sigma < 0$) и двукратного предельного цикла, которые соединяются в точке, где $\sigma = 0$. На рис.4.14 точки, где седловая величина σ обращается ноль, отмечены звездочкой.

На рис.4.14 отмечены области $\overline{D}_{0,1}$, $\overline{D}_{0,-1}$, $\overline{D}_{-1,1}$, $\overline{D}_{1,-1}$, $\overline{D}_{1,0}$, $\overline{D}_{-1,0}$, где фазовом пространстве подели (4.10) состояния равновесия существуют совместно с неустойчивыми предельными циклами (рис.4.15г,ж,к). Отмеченные области ограничены бифуркационными кривыми "неустойчивых"($\sigma > 0$) петель сепаратрис седловых или седло-узловых состояний равновесия. Неустойчивые циклы не оказывают влияния на устойчивость системы, их роль в динамике модели (4.14) сводится к распределению фазовых потоков, а в ансамбле к влиянию на процессы установления режима синхронизации. Вне областей D_S, $D_{0,1}$, $D_{0,-1}$, $D_{-1,1}$, $D_{1,-1}$, $D_{1,0}$, $D_{-1,0}$ в фазовом пространстве подели (4.10) существуют периодические и квазипериодические движения соответствующие регулярным и квазирегулярным режимам биений. На рис.4.14 штриховкой выделены области $D_{1,1}$ и $D_{-1,-1}$ существования устойчивых вращательных предельных циклов $L_{1,1}$ и $L_{-1,-1}$. На рис.4.15л приведен фазовые портрет характерный для области $D_{1,1}$, видно, что регулярные асинхронные режимы могут существовать совместно с синхронным режимом. Области асинхронных режимов узкими клиньями проникают в область D_S, структура таких клиньев аналогична структуре областей совместного существования синхронных и квазисинхронных режимов – их границами служат бифуркационные кривые устойчивых петель сепаратрис и двойных предельных циклов, исходящих из точки, где $\sigma = 0$.

Таким образом, установлено, что кольцевой ансамбль, состоящий из трех фазовых систем с малоинерционными цепями управления, может работать в синхронном режиме, регулярных режимах частичной квазисинхронизации и регулярных режимах биений. В плоскости начальных частотных расстроек проведено разбиение пространства параметров на области существования этих режимов и изучены границы этих областей. Установлено, что в системе может быть до шести состояний равновесия, одно из которых, O_1 – устойчивое. Оно и определяет синхронный режим работы ансамбля. Выявлено, что область захвата в синхронный режим не совпадает с областью его удержания. Это связано с тем, что области существования режимов частичной квазисинхронизации и режимов биений вклиниваются внутрь области, ограниченной *линией 1*. В результате исследований установлено, что границами области существования режимов частичной квазисинхронизации являются кривые "устойчивых"петель сепаратрис и двукратного предельного цикла.

4.4.4 Инерционные системы

При $\gamma_1 = 0$, $\varepsilon \ll 0$ в фазовом пространстве модели (4.14) могут реализовываться два типа аттракторов: состояние равновесия O_1 и предельный цикл $L_{0,1}$. Зафиксируем $\gamma_1 = 0$ и рассмотрим эволюцию этих аттракторов и соответствующих им областей на плоскости параметров (ε, γ_2) (рис.4.16).

Координаты состояний равновесия модели (4.12) не зависят от параметра ε, следовательно, число состояний равновесия и области их существования у моделей (4.12) и (4.14) совпадают.

На рис.4.16 выделена область D_S существования устойчивого состояния равновесия O_1. Эта область с одной стороны ограничена бифуркационной кривой двукратного состояния равновесия (пунктирная *линия 1*), с другой стороны – кривой, где состояние равновесия O_1 теряет устойчивость (*линия 2*). Первая ляпуновская величина на кривой смены устойчивости отрицательная, потому при выходе из области D_S через линию 2 в фазовом пространстве V модели (4.12) мягко рождается устойчивый колебательный предельный цикл L_0. В ансамбле возникает регулярный режим глобальной квазисинхронизации. По мере удаления от границы смены устойчивости цикл L_0 трансформируется в колебательный хаотический аттрактор S_0. Хаотизация колебательного аттрактора L_0 может проходить по двум сценариям. Один сценарий определяется каскадом бифуркаций удвоения периода цикла L_0, другой – разрушением двумерного инвариантного тора T_0, который появляется при смене устойчивости цикла L_0 в результате бифуркации Неймарка-Сакера. На рис.4.16 отмечены области D_0 и D_0^{ch} существования регулярного и хаотического колебательных аттрак-

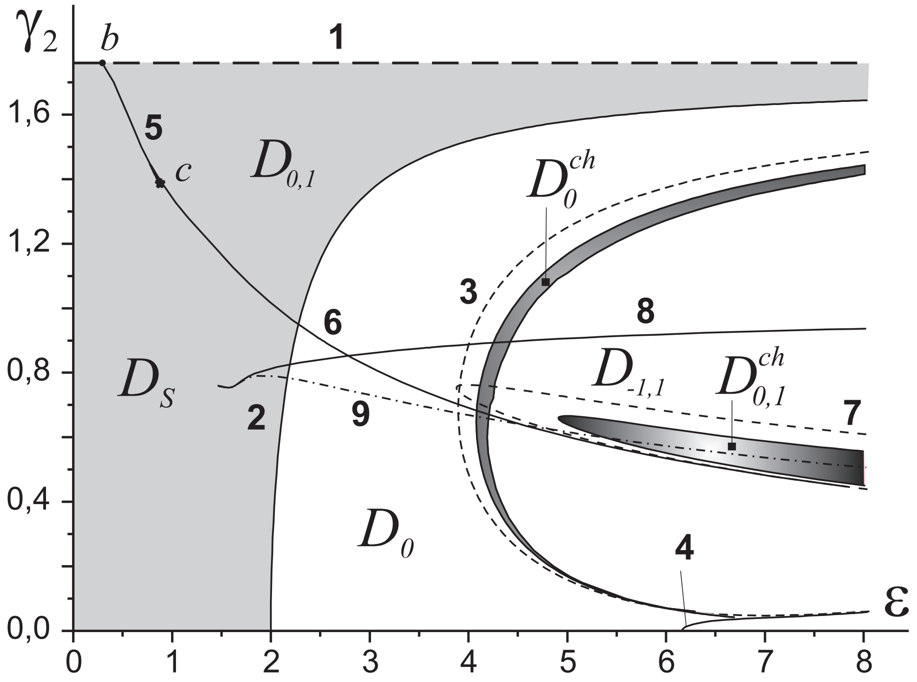


Рис. 4.16: Структура плоскости параметров (ε, γ_2) модели (4.12) при $\gamma_1 = 0$

торов, пунктирная *линия 3* отражает первую бифуркацию удвоения периода цикла L_0, *линия 4* – бифуркацию Неймарка-Сакера. На рис.4.17 приведены проекции колебательных аттракторов модели (4.12) при γ_1=0: инвариантного тора T_0 (рис.4.17а), хаотических аттракторов S_0 с ляпуновской размерностью $D_L = 2.04$ (рис.4.17б) и $D_L = 3.14$ (рис.4.17в), которые являются результатом разрушения инвариантного тора T_0. Аттрактор S_0 на рис.4.17г есть результат бифуркаций удвоения периода цикла L_0, он имеет размерность $D_L = 2.33$.

Колебательно-вращательные аттракторы типа [0,1] (с индексом вращения [0,1]) существуют в области $D_{0,1}$. Эта область ограничена бифуркационными кривыми: петли сепаратрис седло-узла – пунктирная *линия 1* слева от точки b; устойчивой петли сепаратрис седла (седло-фокуса) O_4 – *линия 5*; двукратного колебательно-вращательного предельного цикла – *линия 6*. Линии *5* и *6* соединяются в точке C, где обращается в ноль седловая величина σ седло-фокуса O_4. Внутри области $D_{0,1}$ располагается бифуркационная кривая петли сепаратрис седло-фокуса с положительной седловой величиной σ, согласно [11], в окрестности этой кривой располагаются кривые касательных и удвоения периода бифуркаций различных предельных циклов типа [0,1]. Таким образом, при значениях параметров из области $D_{0,1}$ в фазовом пространстве могут реализовываться различные предельные циклы типа [0,1], эти предельные циклы в результате каскада бифуркаций удвоения периода могут трансформироваться в хаотические аттракторы $S_{0,1}$ типа [0,1]. На рис.4.17д,е представлены проекции хаотических аттракторов типа [0,1] сформированные на базе

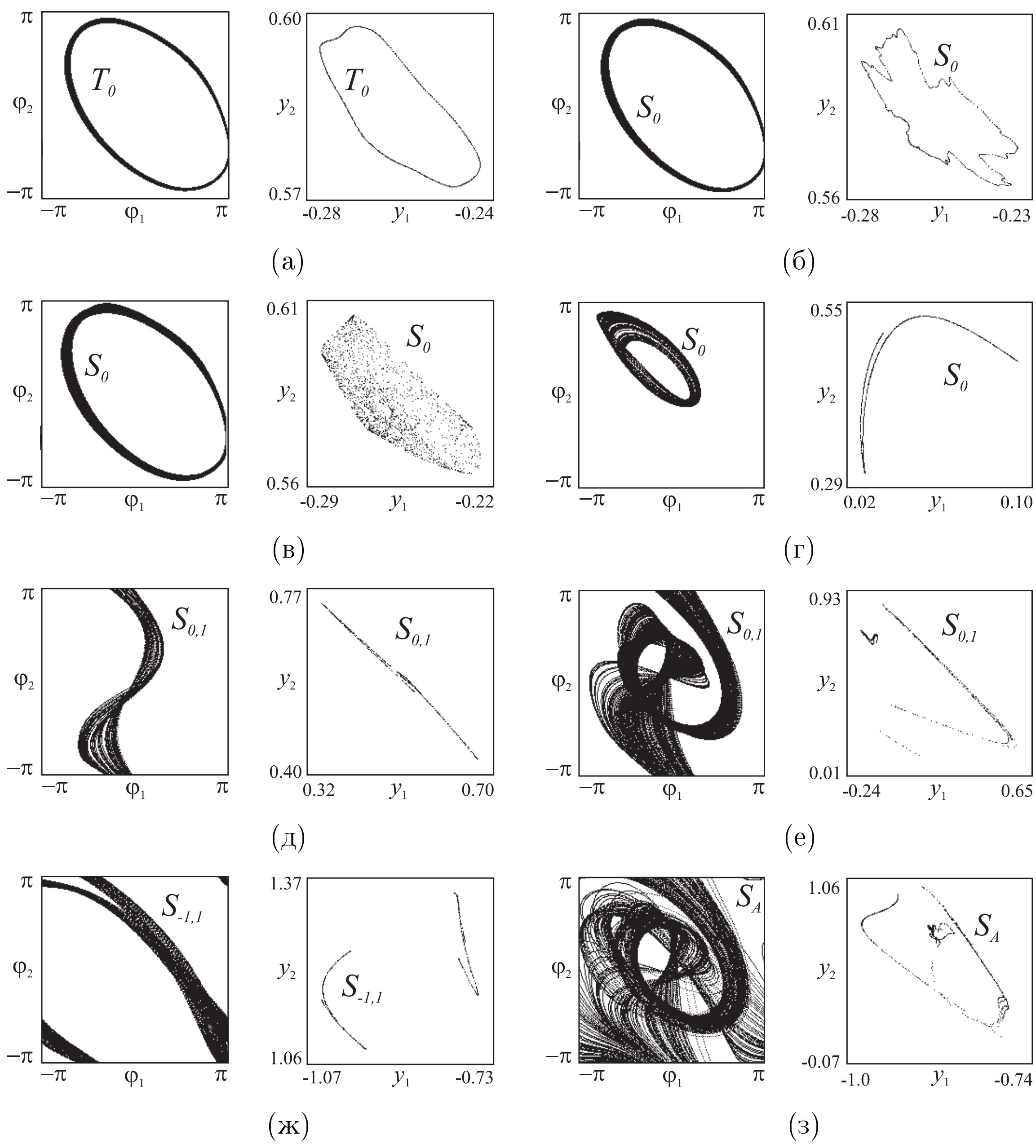
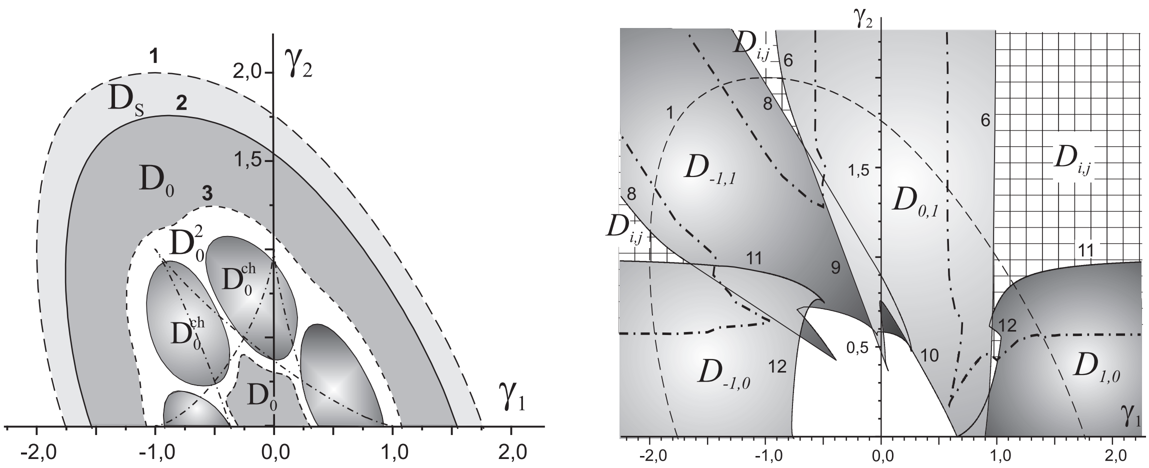


Рис. 4.17: Проекции фазовых портретов и отображений Пуанкаре аттракторов модели (4.12), соответствующие квазисинхронным режимам: глобальным квазирегулярным при $\gamma_2 = 0.04, \varepsilon = 0.7$ (а); глобальным хаотическим при $\gamma_2 = 0.04, \varepsilon = 0.704,\ 0.707$ (б,в); $\gamma_2 = 0.9, \varepsilon = 4.35$ (г); хаотическим типа [0,1] при $\gamma_2 = 0.626, \varepsilon = 6$, (д) и $\gamma_2 = 0.322$, $\varepsilon = 9.15$ (е); хаотическим типа [-1,1] при $\gamma_2 = 0.606, \varepsilon = 4$ (ж); хаотическому режиму биений при $\gamma_2 = 0.2, \varepsilon = 7.6$ (з).

различных предельных циклов типа [0,1]. Хаотические аттракторы $S_{0,1}$ на рис.4.17д и рис.4.17е имеют соответственно размерности $D_L = 2.61$ (рис.4.17д) и $D_L = 2.56$ (рис.4.17е).

В области $D_{-1,1}$ существуют аттракторы типа [-1,1]. Сверху эту область ограничивает *линия 8*– двукратного предельного цикла. При пересечении этой линии сверху вниз в фазовом пространстве U рождается устойчивый предельный цикл $L_{-1,1}$, который при уменьшении γ_2 через серию бифуркаций удвоения периода трансформируется в хаотический аттрактор $S_{-1,1}$ (рис.4.17ж). При дальнейшем уменьшении γ_2 хаотический аттрактор разрушается и система (4.12) в зависимости от параметров переходит либо на режимы описанные выше, либо на режимы биений. На рис.4.16 штрих-пунктирная *линия 9* отвечает за первую бифуркацию удвоения периода цикла $L_{-1,1}$. Области существования циклов $L^{(2)}_{-1,1}$ удвоенного, $L^{(4)}_{-1,1}$ учетверенного и более больших периодов, также как и хаотического аттрактора $S_{-1,1}$ в рассматриваемом случае малы, поэтому на рис.4.16 не выделены.



(а) (б)

Рис. 4.18: Структура плоскости параметров (γ_1, γ_2) модели (4.12) при $\varepsilon = 4.3$. Области существования синхронного режима и режимов глобальной квазисинхронизации (а). Области существования режимов частичной квазисинхронизации и режимов биений (б).

Рис.4.18 дает представление о структуре пространства параметров модели (4.12) в сечении плоскостью (γ_1, γ_2). При рассмотренном значении $\varepsilon = 4.3$ динамика ансамбля характеризуется высокой степенью мультистабильности, поэтому разбиение плоскости (γ_1, γ_2) представлено в виде двух раздельных картин: для синхронного режима и режимов глобальной квазисинхронизации (рис.4.18а) и для режимов частичной квазисинхронизации и режимов биений (рис.4.18б). Объединение рис.4.6а и рис.4.18б определяет структуру пространства параметров ансамбля из трех фазовых систем с инерционными цепями управления. Обозначения областей и кривых на рис.4.18 аналогичны обозначениями, принятым рис.4.16. Отметим некоторые особенности динамики ансамбля, обусловленные инерционностью цепей управления систем ФАП (параметром ε).

Увеличение инерционности приводит к смене устойчивости синхронного режима и возникновению режима регулярной глобальной квазисинхронизации. Область существования режима глобальной квазисинхронизации на плоскости начальных частотных зарождается в точке нулевых частотных расстроек и далее распространяется к границам области существования состояний равновесия, повторяя ее форму (рис.4.18а). В результате область D_S существования синхронного режима приобретает форму кольца, которое сужается с ростом ε.

Режим регулярной глобальной квазисинхронизации с ростом ε теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода. Каскад бифуркаций удвоения периода приводит к возникновению режима хаотической глобальной квазисинхронизации. Область существования режима хаотической глобальной квазисинхронизации на плоскости (γ_1, γ_2) сначала имеет форму кольца, которое при увеличении ε преобразуется в шесть изолированных областей D_0^{ch} (рис.4.18а). На рис.4.18а области D_0 есть области существования режима регулярной глобальной квазисинхронизации.

Изменения областей $D_{0,1}$, $D_{0,-1}$, $D_{-1,1}$, $D_{1,-1}$, $D_{1,0}$ и $D_{-1,0}$ частичной регулярной квазисинхронизации с ростом ε аналогичны. Во-первых, они увеличиваются в размере, во-вторых, все больше проникают в область существования состояний равновесия, наконец, области существования квазисинхронных режимов различных типов, а также асинхронных режимов, начинают пересекаться, порождая высокую степень мультистабильности. Следует обратить внимание еще на один факт, который усложняет коллективную динамику ансамбля. Ранее, при $\varepsilon \ll 1$, области $\overline{D}_{0,1}$, $\overline{D}_{0,-1}$, $\overline{D}_{-1,1}$, $\overline{D}_{1,-1}$, $\overline{D}_{1,0}$ и $\overline{D}_{-1,0}$ отвечали за существование неустойчивых циклов $\varGamma_{0,1}$, $\varGamma_{0,-1}$, $\varGamma_{-1,1}$, $\varGamma_{1,-1}$, $\varGamma_{1,0}$ и $\varGamma_{-1,0}$ соответственно. Эти области были ограничены бифуркационными кривыми петель сепаратрис седел (седло-узлов) с положительной седловой величиной. Выход из этих областей не приводил к возникновению новых аттракторов, а лишь обуславливал перераспределение фазовых потоков и изменения в переходных процессах к режиму синхронизации. Увеличение ε_1 превращает седла в седлофокусы, что, согласно, влечет за собой появление в пространстве параметров новых бифуркационных кривых, а в фазовом пространстве – сложной динамики, вплоть до хаотической. При ε не малых границы областей существования квазисинхронных режимов имеют сложную структуру, обусловленную большим количеством аттрактров одного типа (с одинаковым индексом вращения). На рис.4.18б такими границами являются *линии 9, 10, 12.* Эти линии не связаны с какой-либо бифуркацией аттрактора системы (4.12), а являются интегральной оценкой области существования колебательно-вращательных аттракторов, либо вращательных аттракторов типа [1,-1] или [-1,1].

Области существования режимов биений $D_{i,j}$ с ростом ε расширяются, пересекаются между собой и все глубже проникают в области существования квазисинхронных и синхронных режимов. На рис.4.18б границы областей существования режимов биений проведены штрих–пунктирными линиями, а сами области отмечены штриховкой. Эволюция областей существования предельных циклов $L_{i,j}$ аналогична трансформациям областей существования периодических движений, определяющих режимы частичной квазисинхронизации.

Заметим, что рассмотренное кольцо из трех фазоуправляемых генераторов с фильтрами первого порядка без дополнительных связей, в рамках введенной классификации динамических режимов, демонстрирует все возможные типы режимов: синхронные, регулярные и хаотические режимы глобальной и частичной квазисинхронизации, регулярные и хаотические режимы биений. Следовательно, введение дополнительных связей, а также увеличение числа элементов ансамбля не будет характеризоваться появлением новых режимов.

4.4.5 Дополнительные связи в малоинерционных системах

Перейдем к анализу влияния дополнительных связей на динамику ансамбля из трех генераторов. Численный анализ особых траекторий модели (4.12) свидетельствует о том, что существуют достаточно широкие диапазоны значений параметров κ_1, κ_2, κ_3, в которых динамика ансамбля качественно сохраняет свойства динамики ансамбля без дополнительных связей. Далее значения параметров κ_1, κ_2, κ_3 из этих диапазонов будем называть «слабыми» связями. Введение слабых связей, с одной стороны, не приводит ни к появлению новых динамических режимов, ни к изменениям структуры границ существования установленных ранее (при $\kappa_1{=}\kappa_2{=}\kappa_3{=}0$) динамических режимов. С другой стороны, введение даже одной слабой связи позволяет корректировать $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*$ ошибки режима синхронизации, а также влиять на области существования синхронного режима. Изучение состояний равновесия модели (4.12) при $\kappa_{1,2,3} \neq 0$ показывает, что с помощью связей можно минимизировать фазовые ошибки режима синхронизации, а также изменять диапазон начальных частотных расстроек, добиваясь увеличения областей существования синхронного режима.

Слабые связи

На рис.4.19 приведена структура плоскости параметров (γ_1, γ_2) модели (4.12) при слабых связях. Она качественно совпадает со структурой плоскости параметров (γ_1, γ_2) модели (4.12) в отсутствии связей [?]. Здесь пунктирная *линия 1* ограничивает об-

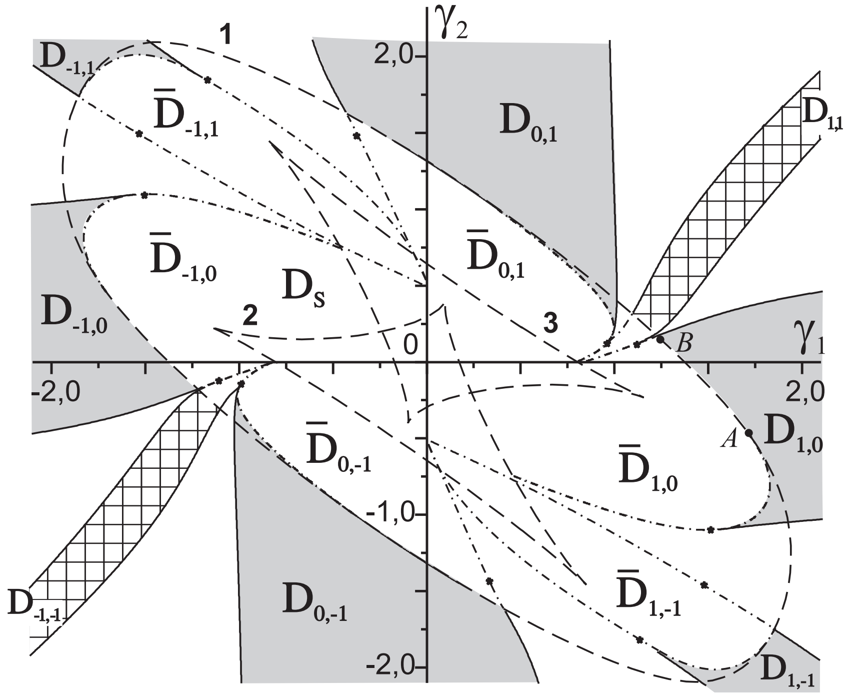


Рис. 4.19: Структура плоскости параметров (γ_1, γ_2) модели (4.14) при слабых связях κ_1=0.1, $\kappa_2 = 0.2$, $\kappa_3 = 0.6$.

ласть существования состояний равновесия модели (4.12). Эта область содержит внутри себя две области треугольного вида, ограниченные пунктирными *линиями 2* и *3*. Система (4.12) в пересечении областей треугольного вида имеет шесть состояний равновесия (рис. 4.3а); внутри треугольников, но вне области их пересечения – четыре состояния равновесия; вне треугольников – два состояния равновесия. Одно из состояний равновесия всегда устойчиво, это состояние равновесия $O_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$. Таким образом область D_S существования синхронного режима совпадает с областью существования состояний равновесия модели (4.12).

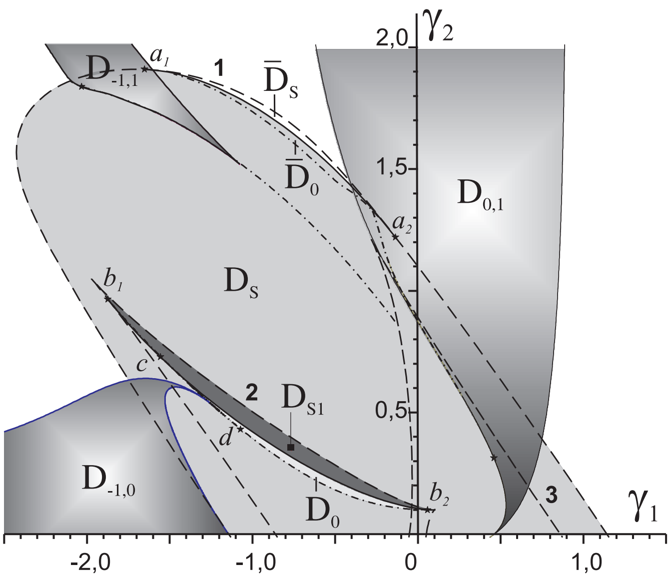
На рис.4.19 серым цветом выделены области параметров, где существуют режимы частичной квазисинхронизации. Фазовые портреты модели (4.12) для значений параметров из областей существования квазисинхроных режимов представлены на рис.4.15б,в,д,е,з,и. Система (4.12) инвариантна относительно преобразования $\Pi : (\gamma_1, \gamma_2, \varphi_1, \ \varphi_2) \to (-\gamma_1, -\gamma_2, \ -\varphi_1, -\varphi_2)$, поэтому фазовые портреты приведены лишь для областей расположенных в области положительных значений γ_1. Области существования режимов частичной квазисинхронизации имеют одинаковую структуру – их границами служат бифуркационные кривые петель сепаратрис седел (штрих–пунктирные линии), седло-узлов (пунктирные линии) и двукратных предельных циклов (сплошные линии).

Рассмотрим структуру границ областей существования режимов частичной квазисинхронизации и трансформацию соответствующих этим областям фазовых портретов на примере области $D_{1,0}$ (рис.4.19). При значениях параметров вне области D_S фазовый портрет системы (4.12) содержит два предельных цикла: устойчивый $L_{1,0}$ и неустойчивый $\Gamma_{1,0}$ (рис.4.15е). При выходе из области $D_{1,0}$ через верхнюю или нижнюю границу предельные циклы сливаются и исчезают в результате касательной бифуркации. При выходе из области $D_{1,0}$ через пунктирную линию, между точками A и B, в результате бифуркации петли сепаратрис седло-узла исчезает цикл $L_{1,0}$, неустойчивый цикл $\Gamma_{1,0}$ сохраняется (рис.4.15ж). Из бифуркационного анализа следует, что области квазисинхронных режимов могут проникать в область D_S, тем самым порождая области с бистабильным поведением – совместного существования синхронного и квазисинхронного режимов. Области бистабильного поведения имеют клинообразный вид, границами этих областей служат бифуркационные кривые «устойчивых» (с отрицательной седловой величиной $\sigma<0$) петель сепаратрис и двукратного предельного цикла, которые соединяются в точке, где $\sigma = 0$. На рис.4.19 точки, где седловая величина σ обращается ноль, отмечены звездочкой.

На рис.4.1 отмечены области $\overline{D}_{0,1}$, $\overline{D}_{0,-1}$, $\overline{D}_{-1,1}$, $\overline{D}_{1,-1}$, $\overline{D}_{1,0}$, $\overline{D}_{-1,0}$, где в фазовом пространстве модели (4.12) состояния равновесия существуют совместно с неустойчивыми предельными циклами (рис.4.15г,ж,к). Отмеченные области ограничены бифуркационными кривыми «неустойчивых» ($\sigma>0$) петель сепаратрис седловых или седло-узловых состояний равновесия. Неустойчивые циклы не оказывают влияния на устойчивость системы, их роль в динамике модели (4.12) сводится к распределению фазовых потоков, а в ансамбле – к влиянию на характер и длительность процессов установления режима синхронизации. Вне областей D_S, $D_{0,1}$, $D_{0,-1}$, $D_{-1,1}$, $D_{1,-1}$, $D_{1,0}$, $D_{-1,0}$ в фазовом пространстве подели (4.12) существуют периодические (рис.4.3з) и квазипериодические (рис.4.15ж) движения, соответствующие регулярным и квазирегулярным режимам биений. На рис.4.19 штриховкой выделены области $D_{1,1}$ и $D_{-1,-1}$ существования устойчивых вращательных предельных циклов $L_{1,1}$ и $L_{-1,-1}$. На рис.4.15л приведен один из фазовых портретов для области $D_{1,1}$, видно, что регулярные асинхронные режимы могут существовать совместно с синхронным режимом. Области асинхронных режимов узкими клиньями проникают в область D_S, структура таких клиньев аналогична структуре областей совместного существования синхронных и квазисинхронных режимов – их границами служат бифуркационные кривые устойчивых петель сепаратрис и двойных предельных циклов, исходящих из точки, где $\sigma = 0$.

Сильные связи

Сильные связи характеризуются появлением новых динамических режимов, новых бифуркационных кривых и, как следствие, новой структурой пространства параметров модели (4.12). На рис.4.20 приведена структура плоскости параметров (γ_1, γ_2), на рис.4.5 некоторые фазовые портреты модели (4.14) в случае сильных связей. В силу инвариантности (4.14) относительно преобразования П картины представлены для $\gamma_1 \geq 0$. Следствием влияния сильных связей является наличие на бифуркационных



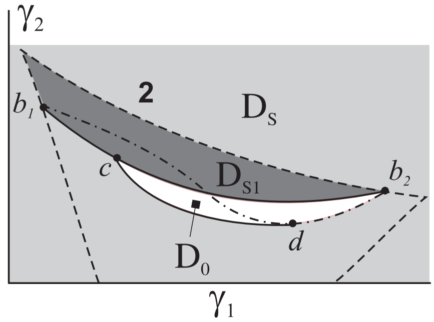


Рис. 4.20: Структура плоскости параметров (γ_1, γ_2) модели (4.14) при сильных связях κ_1=0.1, κ_2=0.9, κ_3=0.9. (а). Увеличенный фрагмент (качественный) плоскости параметров (γ_1, γ_2) модели (4.14) при сильных связях (б).

кривых двукратных состояний равновесия точек коразмерности два, отвечающих существованию в фазовом пространстве V состояний равновесия с двумя нулевыми характеристическими корнями (бифуркация Богданова) [?]. В численном эксперименте нами установлено, что такие точки появляются на *линиях 1,2,3* одновременно, причем, в силу симметрии, на *линии 1* такие точки появляются в двух местах. При фиксированных $\kappa_1 = 0.1$, $\kappa_2 = 0.9$ границей слабых и сильных связей служит значение $\kappa_3 = 0.654546$. Дальнейшее увеличение κ_3 приводит к появлению на *линии 1* отрезка (a_1, a_2), где у состояния равновесия узловая часть неустойчива, а на *линии 2* отрезка (b_1, b_2), где существует состояние равновесия с устойчивой узловой частью. Таким образом, изменения структуры пространства параметров в случае сильных связей происходят одновременно в двух местах: в окрестности *линии 1* и в окрестности *линии 2*(*линии 3*). На *линии 1* изменения происходят в окрестности отрезка

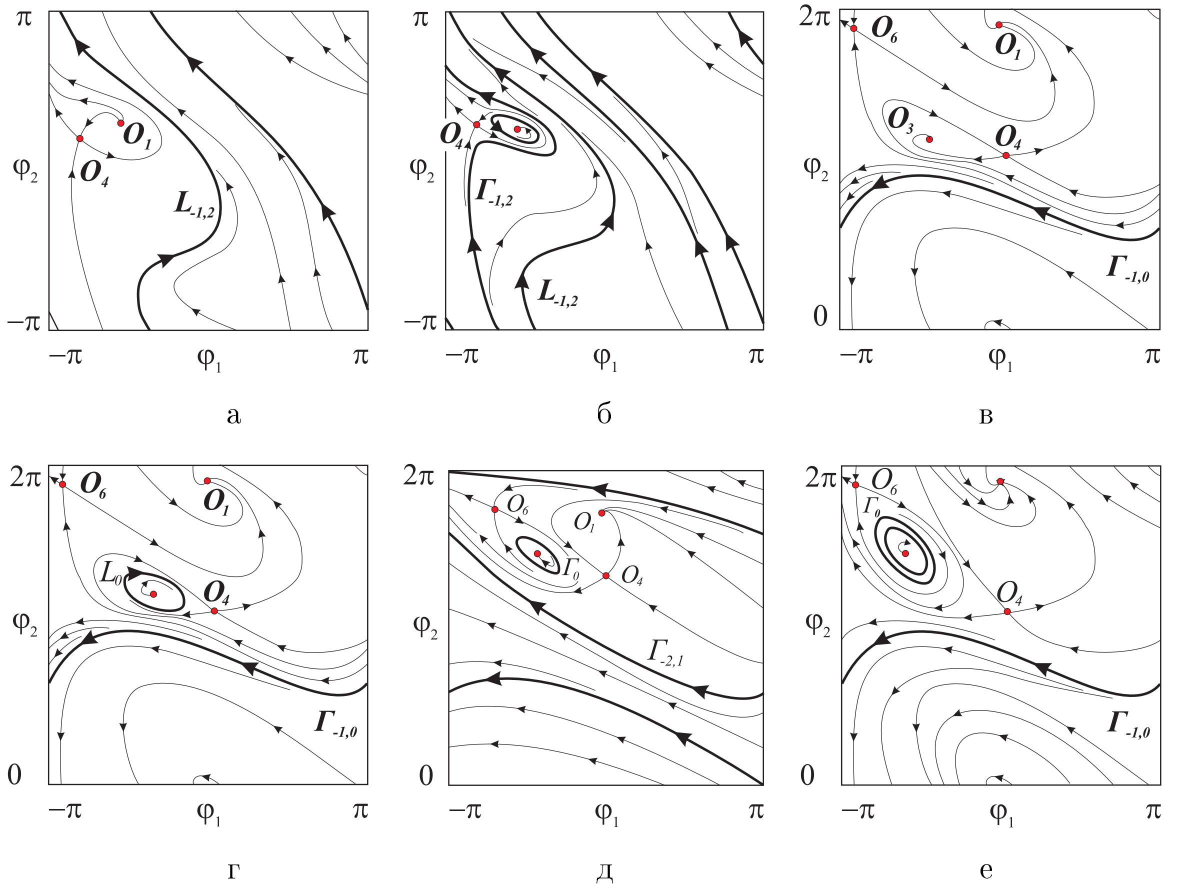


Рис. 4.21: Фазовые портреты модели (4.12) в областях $\overline{D}_S$ (а), $\overline{D}_0$ (б), D_{S1} (в), D_0 (г,д,е).

(a_1, a_2). Отрезок (a_1, a_2) является одной из границ области $\overline{D}_S$, где все состояния равновесия системы (4.12) неустойчивы (рис.4.21а). Другой границей области $\overline{D}_S$ служит кривая смены устойчивости состояния равновесия O_1 через бифуркацию Андронова-Хопфа. На рис.4.4 этой границе отвечает сплошная линия, соединяющая точки a_1 и a_2. Первая ляпуновская величина L на бифуркационной кривой Андронова-Хопфа положительна ($L{>}0$), поэтому смена устойчивости состояния равновесия O_1 сопровождается рождением неустойчивого колебательного цикла $\varGamma_0$ (рис.4.21б). По мере удаления от бифуркационной кривой смены устойчивости предельный цикл $\varGamma_0$ исчезает в петлю сепаратрис 1-го рода седла O_4. На рис.4.20 бифуркационная кривая петли сепаратрис изображена штрих-пунктирной линией, она ограничивает область $\overline{D}_0$ неустойчивого колебательного цикла $\varGamma_0$. Таким образом, при сильных связях меняется структура границ области D_S существования синхронного режима. В случае сильных связей область D_S не совпадает с областью существования состояний равновесия, она ограничена бифуркационными кривыми двукратного состояния равновесия и Андронова-Хопфа. Заметим, что в области $\overline{D}_0$ бассейн притяжения устойчивого состояния равновесия O_1 ограничен циклом $\varGamma_0$, размер которого мал. Поэтому при значениях параметров из области $\overline{D}_0$ вероятность реализации синхронного режима мала, в связи с чем, область $\overline{D}_0$ можно исключить из области существования синхронного режима.

Структура пространства параметров в окрестности *линии 2* качественно представлена на рис.4.20б. Здесь в области D_{S1} система (4.12) имеет два устойчивых состояния равновесия O_1 и O_3 (рис.4.21в), т.е. в ансамбле одновременно существует два синхронных режима. Области D_{S1} с одной стороны ограничена отрезком (b_1, b_2) бифуркационной кривой двукратного состояния равновесия, с другой стороны бифуркационной кривой Андронова-Хопфа (сплошная линия между точками b_1 и b_2). В точке C первая ляпуновская величина равна нулю ($L = 0$). Справа от точки C величина $L < 0$, поэтому при выходе из области D_{S1} смена устойчивости состояния равновесия O_3 сопровождается мягким рождением устойчивого колебательного цикла L_0 (рис.4.21г). Цикл L_0 определяет режим глобальной квазисинхронизации ансамбля, он существует при значениях параметров из области D_0. Область существования режима глобальной квазисинхронизации ограничена отрезком b_2, c (кривой бифуркации Андронова-Хопфа, $L < 0$), отрезком c, d – бифуркационной кривой двукратного предельного цикла и отрезком d, b_2 – бифуркационной кривой устойчивой ($\sigma < 0$) петли сепаратрис 1-го рода седла O_4. Штрих-пунктирная линия, соединяющая точки b_1 и d, соответствует бифуркации петли 1-го рода сепаратрис седла O_6. Седловая величина на этой кривой положительна, поэтому при разрушении гомоклинической траектории в фазовом пространстве V рождается неустойчивый колебательный предельный цикл Γ_0. Рождение цикла Γ_0 происходит при пересечении бифуркационной кривой с уменьшением γ_2 (рис.4.21д). Дальнейшее уменьшение γ_2 приводит к исчезновению Γ_0 – при значениях γ_1 слева от точки C цикл стягивается в точку O_3, делая ее неустойчивой (бифуркация Андронова-Хопфа, $L > 0$), при значениях γ_1 справа от точки C цикл Γ_0 исчезает в результате касательной бифуркации, сливаясь с устойчивым циклом L_0 (рис.4.21е).

Заметим, что аналогичная структура пространства параметров ранее наблюдалась в модели двух каскадно связанных фазовых систем с дополнительными связями по цепям управления, причем эта структура была обусловлена наличием дополнительных связей [**?**].

Заключение

Приведены результаты исследования коллективной динамики алых ансамблей систем фазовой синхронизации (фазовой автоподстройки частоты – ФАП). Рассмотрено два типа объединения фазоуправляемых генераторов в ансамбль. Параллельное объединение, когда генераторы ансамбля связаны между собой через сигналы фазовых рассогласований с использованием дополнительного фазового дискриминатора, и частный случай последовательного (каскадного) соединения, когда выходной сигнал одного парциального элемента является входным для последующего, — кольцевое соединение систем ФАП.

Приведены результаты изучения синхронных режимов при объединении систем в ансамбль. Показанов влияние параметров связей и характеристик самих систем на области существования режиомв глобальной синхронизации.

Исследованы асинхронные автоколебательные режимы. Установлено, что движения в $N-$ мерном фазовом пространстве динамической модели могут быть периодическими и квазипериодическими. Периодические решения для отдельных элементов цепочки могут иметь весьма сложную структуру, которая определяется поведением фазовых траекторий на тороидальной фазовой поверхности и характеризуется числом вращения. Фазоуправляемые генераторы цепочки могут функционировать в квазисинхронном режиме. Таким режимам в фазовом пространстве динамической модели отвечаю периодических движения, ограниченные по соответствующим фазовым переменным. Показано, что элементы рассмотренной цепочки не способны функционировать в хаотических режимах.

Проведен бифуркационный анализ моделей малых ансамблей, состоящих из двух и трех элементов. На плоскости параметров выделены области синхронных, асинхронных периодических и квазипериодических режимов.

Показано, что объединение систме ФАП в ансамбли не только улучшает их синхронизующие свойства, но и позволяет осуществлять генерацию колебаний различной сложности, в том числе хаотические. При этом области существования таких режимов в пространстве параметров для ансамблей оказываются значительно больше по сравнению с аналогичными режимами, получаемыми в одиночных системах ФАП с фильтрами высоких порядков.

В частности, интересны результаты полученные в кольце из двух систем ФАП. Показана возможность генерации колебаний, аналогичных колебаниям в системе ФАП с полосовым фильтром, которые внешне похожи на колебания нейрона.

Таким образом, исследование ансамблей систем ФАП интересно не только с точки зрения автоматической синхронизации, но и для решения задач генерации сложных колебаний.

Литература

[1] Henriquez P et. al. // IEEE transactions on audio, speech, and language processing, vol. 17, no. 6, 2009.

[2] Капранов М.В. Взаимодействующие многосвязанные СФС // В сб.: Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. Гл. 4. С. 55.

[3] Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФАН, 1989. 256 с.

[4] Мишагин К.Г., Шалфеев В.Д., Пономаренко В.П. Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решетках. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 188 с.

[5] Мишагин К.Г., Шалфеев В.Д. Управление градиентными фазовыми распределениями в модели активной антенной решетки с локальными связями между элементами // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 23. С. 32

[6] Coherent laser beam combining Weinheim / edited by Arnaud Brignon. Germany: Wiley-VCH, c2013.

[7] Matrosov V.V., Mishchenko M.A. Shalfeev V.D. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop // Eur. Phys. J. Special Topics, 2013, v.222,i.10, p. 2399

[8] Osipov G.V., Kurths J., Zhou Ch. Synhronization in Osccillatory Networks. Berlin: Springer, 2007.

[9] Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н.Новгород. Изд-во ННГУ, 2013. 366 с.

[10] Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Стационарные режимы в цепочке однонаправленно связанных систем фазовой синхронизации // Радиотехника. 1988. № 3. С. 27-38

[11] Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. 289 с.

[12] Лифшиц Л.М. Некоторые вопросы синхронизации разветвленных сетей передачи данных // Электросвязь. 1972. № 5. С. 44–48.

[13] Матросов В.В. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н.Новгород. ННГУ. 2002.

[14] Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.

[15] Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.

[16] Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. Под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капранова М.: Сов. радио, 1978.

[17] Капранов М.В. Элементы теории систем фазовой синхронизации. Уч. пособие по курсу теории колебаний. М.: изд. МЭИ, 2006

[18] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. литературы, 1981. 568 с. 3-е изд. (2-е изд. – 1959г., 1-е изд. – 1937г.)

[19] Белюстина Л.Н. Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты // Изв.вузов. Радиофизика, 1959, т.2, №2, с. 277-291.

[20] Белюстина Л.Н., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д. Применение ЭВМ к расчету полосы захвата нелинейных систем фазовой автоподстройки частоты // Радиотехника. 1972. Т. 27. № 7. С. 36–39.

[21] Шахгильдян В.В., Белюстина Л.Н., Капранов М.В. Фазовая синхронизация. М.: Связь, 1975.

[22] Шалфеев В.Д. К исследованию системы частотно-фазовой автоподстройки частоты при одинаковых интегрирующих фильтрах в фазовой и частотной цепях // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. № 7. С. 1037–1051.

[23] Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д. О величине полосы захвата системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. № 4. С. 56.

[24] Белюстина Л.Н., Шалфеев В.Д. К теории нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. № 3. С. 383–396.

[25] Белых В.Н., Шалфеев В.Д. Исследование динамики системы фазовой автоподстройки частоты с нелинейной емкостью в фильтре нижних частот // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. № 3. С. 407–410.

[26] Белых В.Н., Шалфеев В.Д. Частотно-фазовая автоподстройка частоты с нелинейным фильтром в фазовой цепи управления // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. № 11. С. 1756–1759.

[27] Шалфеев В.Д. Качественное исследование цилиндрического фазового пространства одной нелинейной динамической системы из теории фазовой синхронизации // Differential equations and applications (II). Proc. of the 2 conf. Rousse'81. Bulgaria. 1982. P. 823–834.

[28] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

[29] Леонов Г.А., Смирнова В.Б. Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000. 400 с.

[30] Леонов Г.А., Селеджи С.М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике. СПб.: «Невский диалект», 2002. 112 с.

[31] Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. 289 с.

[32] Грачев И.Ю., Грибков Д.А., Кузнецов Ю.И. , Минакова И.И. Синхронные, многочастотные и хаотические процессы в системах связанных генераторов // Электричество. 1987. № 7. С. 50–78.

[33] Сетевые спутниковые радионавигационные системы / Под ред. П.П. Дмитриева, В.С. Шебшаевича. М.: Радио и связь, 1982. 272 с.

[34] Тузов Г.И. Статистическая теория приема сложных сигналов. М.: Сов. радио, 1977. 400 с.

[35] Журавлев В.И. Поиск и синхронизация в широкополосных системах. М.: Радио и связь, 1986. 240 с.

[36] Yuen J.H. A double-loop tracking system // IEEE Trans. on Commun. 1972, December. V. Com.-20. № 6. P. 1142.

[37] Ohlson J.E. Polarization tracking of a partially coherent signal using a double loop // IEEE Trans. on Commun. 1975. Vol. Com.-23. № 9. P. 859.

[38] Шахгильдян В.В., Савватеев Ю.И. К исследованию условий устойчивости двухпетлевых систем фазовой синхронизации // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 7. С. 1035–1042.

[39] Быховский М.А. Синтез и анализ двухканального компенсатора помех для сигналов с ЧМ // Электросвязь. 1980. № 10. С. 16–21.

[40] Федосова Т.С. Сложные системы фазовой синхронизации: уч. пособие. М.: Моск. ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 1992.

[41] Пономаренко В.П. К теории систем синхронизации с перекрестными связями // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 11. С. 1728.

[42] Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. и др. Решеточные модели в нелинейной динамике неравновесных сред: Препринт ИПФ АН СССР. 1987. № 163. 24 с.

[43] Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Развитие хаоса в ансамблях динамических структур // ЖЭТФ. 1985. Т. 81. № 1. С. 92–104.

[44] Капранов М.В. Каскадные системы фазовой автоподстройки часты // В сб.: Динамика систем. Горький: Изд-во ГГУ. 1976. № 11. С. 76–85.

[45] Капранов М.В. Взаимодействующие многосвязанные СФС // В сб.: Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. Гл. 4. С. 55.

[46] Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.

[47] Белых В.Н., Веричев Н.Н. О динамике взаимосвязанных ротаторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 6. С. 668.

[48] Белюстина Л.Н., Белых В.Н. О глобальной структуре разбиения цилиндрического фазового пространства одной неавтономной системы //Дифференциальные уравнения, 1973, т.9,№4, с.595-608

[49] Шалфеев В.Д. Исследование динамики системы фазовой автоподстройки частоты с разделительным конденсатором в цепи управления // Известия вузов. Радиофизика, 1968, 11(3), С. 397–406.

[50] Шалфеев В.Д. Система ФАП с разделительной емкостью // Радиотехника, 1970, 10, С. 63–65.

[51] Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты (2-е изд.). Москва: "СВЯЗЬ 1972.

[52] Мищенко М.А. Нейроноподобная модель на основе системы фазовой автоподстройки частоты // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, 5(3), С. 279-282.

[53] Матросов В.В. Регулярные и хаотические колебания в фазовой системе // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. № 23. С. 4–8.

[54] Матросов В.В. Автомодуляционные режимы системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. № 4. С. 357–368.

[55] Матросов В.В., Касаткин Д.В. Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48. № 6. С. 637–645.

[56] Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1967.

[57] Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005. 464 с.

[58] Касаткин Д. В. Эффект подавления колебаний в ансамблях взаимосвязанных фазовых систем // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, N 6. - С. 36-43

[59] Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.